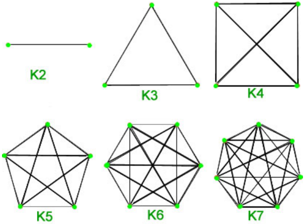
Diskretne strukture

Enajsti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

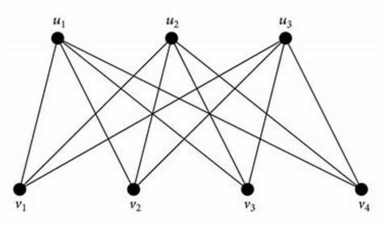
18. december 2020

- Graf je **poln**, če sta vsaki njegovi točki sosedi. Poln graf na n točkah označimo z K_n.

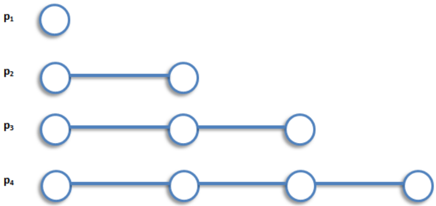


- Graf je **prazen**, če nobeni njegovi točki nista sosedi. Prazen graf na n točkah označimo s $\overline{K_n}$.

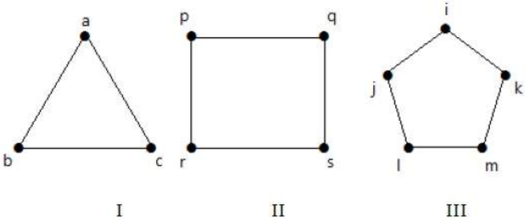
- Graf je **polni dvodelni graf** na $n + m$ točkah, če vsebuje dva barvna razreda s po n in m točkami, točki sta sosedi natanko tedaj, ko sta v različnih barvnih razredih. Te grafe označujemo z $K_{n,m}$.



- Graf je **pot** na n točkah, če lahko vozlišča naštejemo v zaporedju $v_1, v_2, \ldots, v_n$, pri čemer so povezave ravno $\{v_i, v_{i+1}\}$ za $i = 1, \ldots, n-1$. To označimo s P_n.



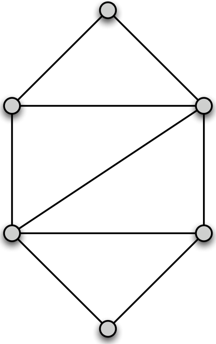
- Graf je **cikel** na $n \geq 3$ točkah, če lahko vozlišča naštejemo v zaporedju $v_1, v_2, \ldots, v_n$, pri čemer so povezave ravno $\{v_i, v_{i+1}\}$ za $i = 1, \ldots, n-1$ in $\{v_n, v_1\}$.To označimo s C_n.



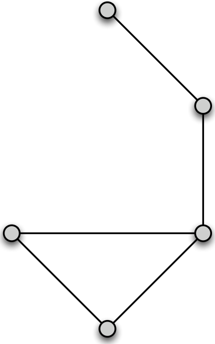
Podgrafi

Naj bosta H in G grafa. Pravimo, da je:

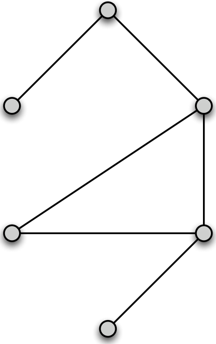
- H **podgraf** grafa G, kar označimo z $H \subseteq G$, če je
  - $V(H) \subseteq V(G)$
  - $E(H) \subseteq E(G)$.
- H **vpet podgraf**, če je podgraf in velja še $V(H) = V(G)$.



Graf G.



$H_1 \subseteq G$



$H_2 \subseteq G$, vpet.

- **Sprehod** S v grafu $G = (V, E)$ je zaporedje vozlišč

$$v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n,$$

  pri čemer sta zaporedni vozlišči sprehoda v_i in v_{i+1} sosedi v grafu G ($i = 0, \dots, n-1$). Dolžina sprehoda $S = u_0 u_1 \dots u_n$ je enaka n, $|S| = n$.
- Sprehod S je:
  - **pot**, če je $v_i \neq v_j$ za vse $0 \leq i < j \leq n$.
  - **obhod**, če je $v_0 = v_n$.
  - **cikel**, če je $v_0 = v_n$, sicer pa so točke med sabo različne in je $n \geq 3$.
- Graf G je **povezan**, če za vsaki dve vozlišči $u, v \in V(G)$ v grafu G obstaja sprehod z začetkom v u in koncem v v.

Trditev. Če v grafu obstaja sprehod od u do v, potem obstaja tudi pot od u do v.

Dokaz. Naj bo $S := uv_1v_2 \dots v_{n-1}v$ eden od najkrajših sprehodov od u do v. Velja:

- Če bi bil v_i enak u za nek i, potem bi bil $v_iv_{i+1} \dots v_{n-1}u$ krajši sprehod od u do v, kar je protislovje.
- Če bi bil v_i enak v za nek i, potem bi bil $uv_1 \dots v_i$ krajši sprehod od u do v, kar je protislovje.
- Če bi bil v_i enak v_j za neka i, j, $i \neq j$, potem bi bil $uv_1 \dots v_iv_{j+1} \dots v_{n-1}v$ krajši sprehod od u do v, kar je protislovje.

Torej je S pot.

Razdalja med vozliščema u in v je dolžina najkrajše poti od vozlišča u do v. Oznaka: $d(u, v)$. Če u in v nista povezana, potem je $d(u, v) = \infty$. Posebej: $d(u, u) = 0$.

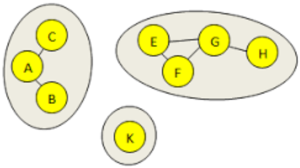
V množici točk grafa G definirajmo relacijo P z naslednjim predpisom:

$$uPv \iff \text{v } G \text{ obstaja sprehod od } u \text{ do } v.$$

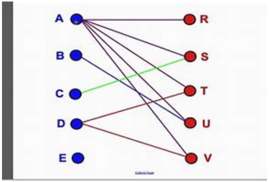
Trditev

Relacija P je ekvivalenčna.

Ekvivalenčni razredom vozlišč glede na relacijo P pravimo **komponente za povezanost**.



Graf G je **dvodelen**, če lahko točke grafa G pobarvamo z dvema barvama takó, da ima vsaka povezava krajišči različnih barv.



Izrek

Graf G je dvodelen natanko tedaj, ko G ne vsebuje ciklov lihe dolžine.

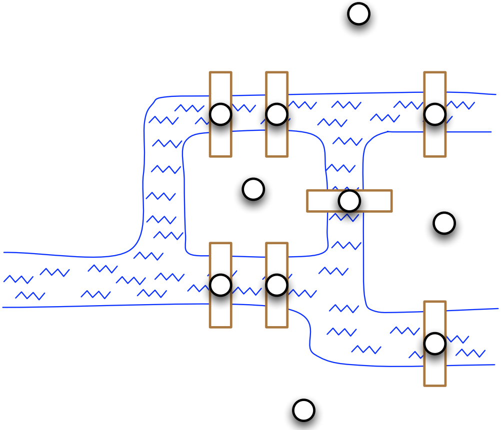
Premislek. Smer $(\Rightarrow)$: Naj bo G dvodelen. Dokažimo, da ne vsebuje ciklov lihe dolžine. Dokazujemo s protislovjem. V kolikor bi imeli cikel lihe dolžine, potem bi po lihem številu korakov prišli iz nekega vozlišča nazaj vase. Toda na vsakem koraku zamenjamo barvo vozlišča, zato bi morali biti po liho mnogo korakih v vozlišču nasprotne barve. To pa je protislovje.

Smer $(\Leftarrow)$: Predpostavimo lahko, da je G povezan, sicer dokazujemo v vsaki komponenti za povezanost posebej. Naj bo v neko izbrano vozlišče. Definirajmo množici

$$A := \{u \in V(G) \colon d(u,v) \text{ je liho.}\}, \quad B := \{u \in V(G) \colon d(u,v) \text{ je sodo.}\}.$$

A in B sta iskana barvna razreda. Če bi bili dve točki u_1, u_2 iz npr. A povezani, potem bi imeli pot iz u do u_1 prek u_2 nazaj do u, ki bi bila lihe dolžine. Če odstranime iz te poti dele $w_1 w_2 \cdots w_m w_1$, ki so sode dolžine, dobimo cikel lihe dolžine. Protislovje.

Euler, 1736
Königsberg.



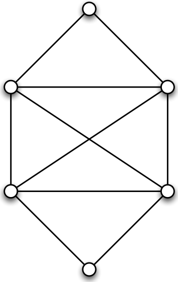
- *Ali obstaja obhod po mestu, ki bi prehodil vse mostove in sicer vsakega natanko enkrat?*

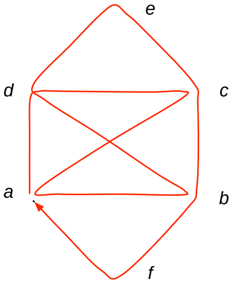
Sprehod v grafu G je **enostaven**, če vsako povezavo *uporabi* največ enkrat.

Vprašanje: Ali v grafu G obstaja enostaven obhod, ki vsebuje vse povezave in vse točke?

Enostaven obhod v grafu G, ki vsebuje vse povezave in vse točke imenujemo **Eulerjev obhod**.

Graf G je **Eulerjev**, če ima kak Eulerjev obhod.





Izrek (Euler)

Graf G je Eulerjev natanko tedaj, ko je G povezan in so vse njegove točke sodih stopenj.

Dokaz. Smer ($\Rightarrow$): Če je graf Eulerjev, potem ima Eulerjev obhod. To najprej pomeni, da je G povezan. Hkrati na obhodu v vsako točko, razen začetne oz. končne, vstopimo in izstopimo. To pomeni, da pri vsakem prehodu porabimo dve povezavi s krajiši v tej točki. Skupaj torej $2k$ povezav, kjer je k število prehodov. Za začetno oz. končno točko pa na začetku in koncu porabimo po eno povezavo, pri vsakem vmesnem prehodu pa dve povezavi. Torej je tudi ta točka sode stopnje.

Smer ($\Leftarrow$). Naj bo O najdaljši enostaven obhod v grafu G. Radi bi pokazali, da O vsebuje vse povezave. V nasprotnem obstaja neko vozlišče v_1 na O, iz katerega še vodi neka povezava $\{v_1, v_2\}$. Če tako vozlišče namreč ne bi obstajalo, obstajalo pa bi še vozlišče zunaj O-ja, potem G ne bi bil povezan. Na O smo v vsakem vozlišču porabili sodo število povezav (v vsako vozlišče pridemo in odidemo iz njega). Po povezavi $\{v_1, v_2\}$ iz v_1 pridemo v v_2. Ker je v_2 sode stopnje in smo na O porabili sodo mnogo povezav, mora obstajati še neka povezava $\{v_2, v_3\}$. Nadaljujemo ta premislek in ker je povezav končno mnogo, se po končno mnogo korakih vrnemo v v_1. Če se vrnemo v kakšnega od ostalih, npr. v_2, ga bomo lahko tudi zapustili, saj smo porabili samo liho mnogo povezav. Pri tem smo naredili enostaven obhod $v_1 v_2 \ldots v_{n-1} v_1$. Sedaj pa lahko O podaljšamo z obhodom $v_1 v_2 \ldots v_{n-1} v_1$ in dobimo daljši obhod. To pa je protislovje. Torej je O Eulerjev obhod.