Digitalna vezja, BVS-RI

Mira TREBAR

P2 – Opis logičnih vezij – Booleova algebra

P2 Vsebina

- Uvod
- Logične operacije in vrata
- Booleova algebra
- Zapis logičnih funkcij

- Literatura
  - Widmer N.S., Moss G.L., Tocci R.J, Digital Systems Principles in Applications, Pearson Education, 2007 (splet), 2018 (knjižnica) (P3)
  - Video:

    https://www.youtube.com/watch?v=2zRJ1ShMcgA
    https://www.youtube.com/watch?v=aQosPmPAaF8

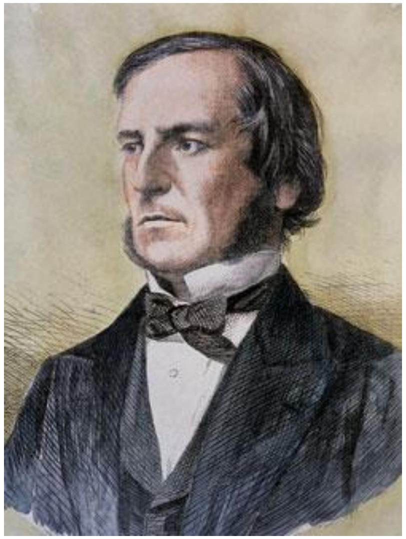
    https://www.youtube.com/watch?v=EPJf4owqwdA

    https://www.youtube.com/watch?v=XMCW6NFLMsg

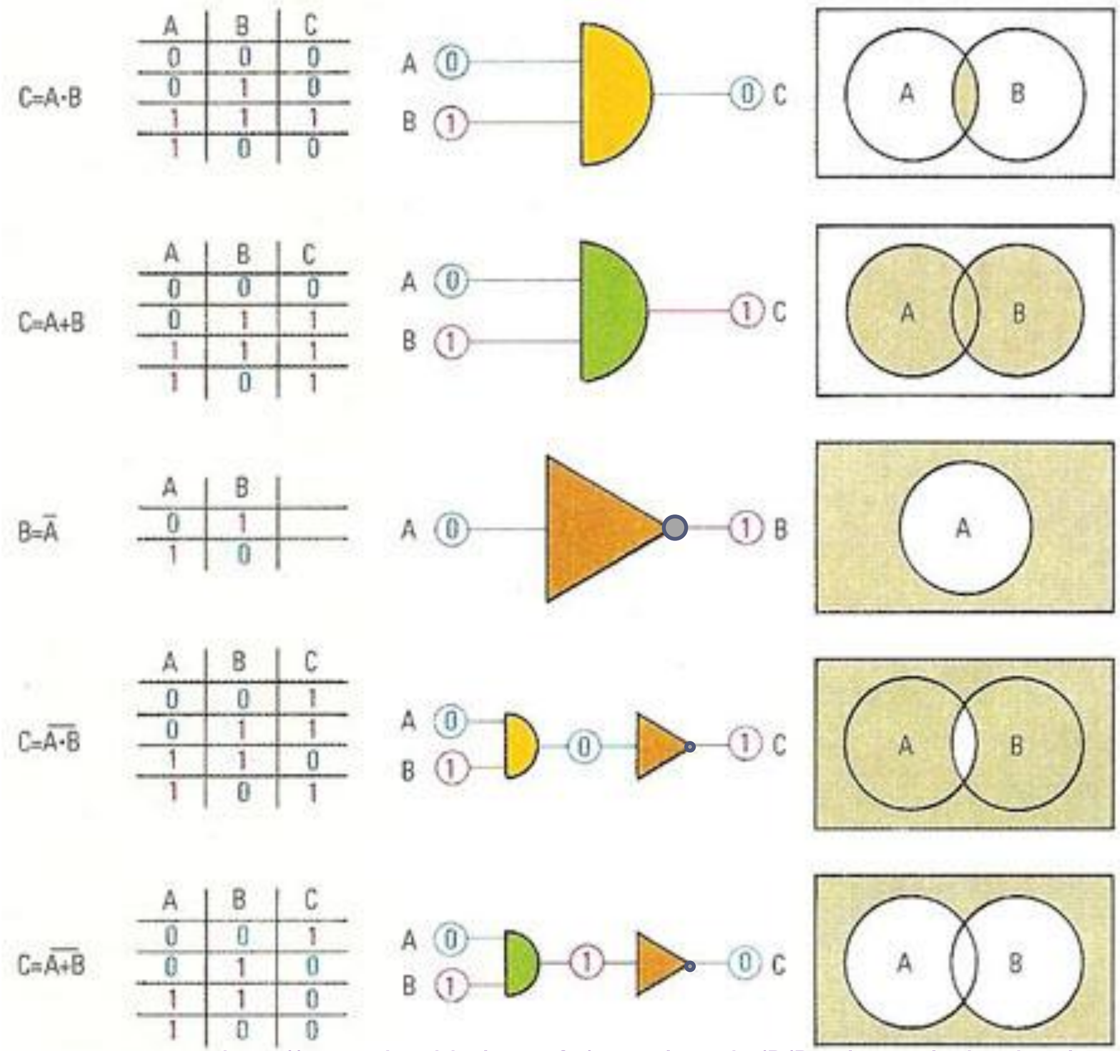
    https://www.youtube.com/watch?v=ZyCzgqijpmM

Uvod

- Logična vezja
  - potrebujemo metodo za opis odločitev, ki jih sprejemajo.
  - odkrili bomo veliko načinov za opis njihovega delovanja.
  - pojavljajo se v tehnični literaturi in sistemski dokumentaciji.
  - uporabljajo se z orodji za razvoj naprav.
- Algebra - veja matematike, ki vključuje uporabo aritmetičnih pravil za številke in črke, ki pomenijo neznana števila, z glavnim ciljem reševanja enačb.
- **Booleova algebra** temelji na načelih matematične logike. Predstavlja študijo operacij, ki se izvajajo na spremenljivkah z eno od dveh možnih vrednosti (ničla - 0 (false) in enica - 1 (true).
- **George Boole** (1815 - 1864)
  - Angleški matematik, filozof in logik,
  - Profesor (Queen's College v Corku na Irskem).



- Booleovi izrazi
- Pravilnostne tabele
- Logična vezja
- Vennovi diagrami v teoriji množic



http://www.daviddarling.info/encyclopedia/B/Boolean_algebra.html

1 Booleovi konstanti in spremenljivke

- Booleovi konstanti

Logična 0	Logična 1
False	True
Off	On
Low	High
No	Yes
Odprto stikalo	Zaprto stikalo

Vzemimo primer, da je v določenem digitalnem sistemu lahko logična vrednost 0 za vsako napetost v območju od 0 do 0,8 V, medtem ko je logična vrednost 1 lahko določena za vsako napetosti v območju od 2 do 5 V.

- Logične spremenljivke
  - so vhodi katerih logični nivoji določajo izhodni nivo (količina, ki zavzame vrednost 0 ali 1).
  - so predstavljene s črkami.

2 Pravilnostna tabela

- Digitalno vezje

- Pravilnostna tabela

Vhoda

Izhod

A	B	A v B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A	B	C	A v B v C
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

A	B	C	D	
0	0	0	0	
0	0	0	1	
0	0	1	0	
0	0	1	1	
0	1	0	0	
0	1	0	1	
0	1	1	0	
0	1	1	1	
1	0	0	0	
1	0	0	1	
1	0	1	0	
1	0	1	1	
1	1	0	0	
1	1	0	1	
1	1	1	0	
1	1	1	1	

3 Logične operacije in vrata (OR, AND, NOT)

- **Disjunkcija (OR)** ima dva vhoda**: x v y, x + y**

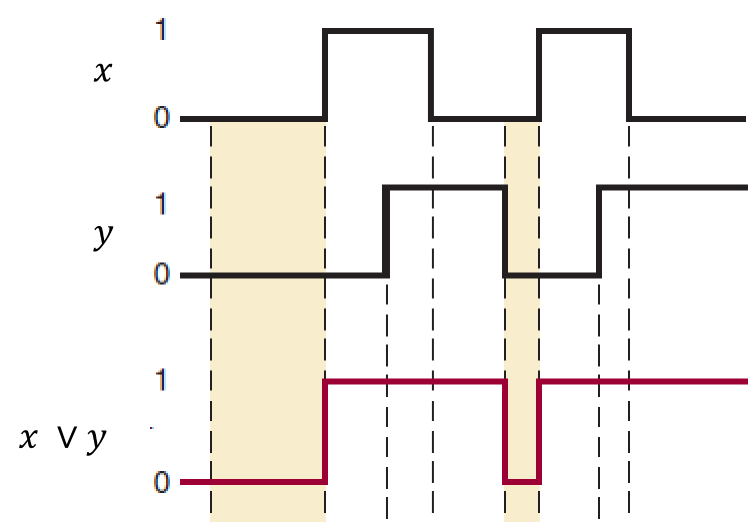
  Izhod = 1, če **je vsaj 1 vhod** enak 1

  Izhod = 0, sicer

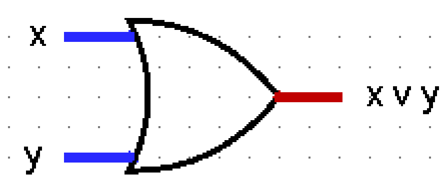
- Pravilnostna tabela

x	y	x V y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Časovni diagram



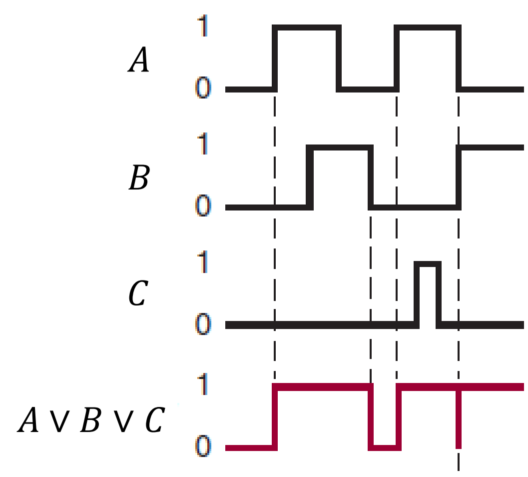
- Logična vrata



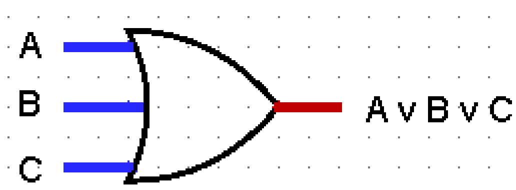
- **Disjunkcija (OR)** ima tri vhode: **A v B v C**
  - Pravilnostna tabela

A	B	C	A v B v C
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Časovni diagram



  - Logična vrata



- **Konjunkcija (AND)** ima dva vhoda **: x & y, x . y, x y**

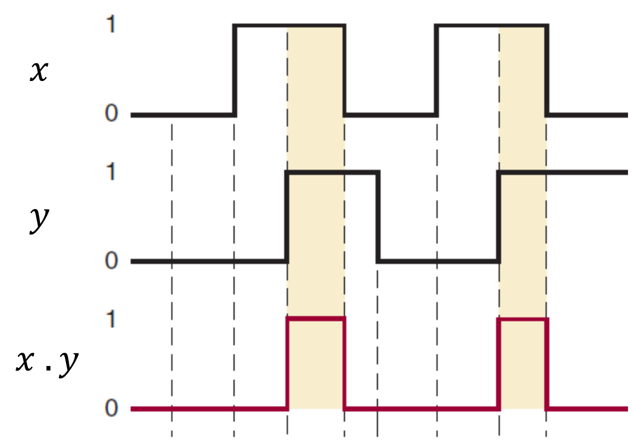
  Izhod = 1, če **so vsi vhodi** enaki 1

  Izhod = 0, sicer

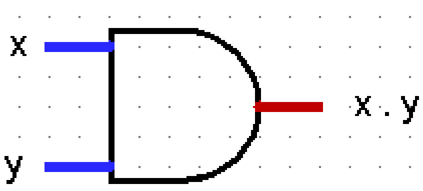
- Pravilnostna tabela

x	y	x . y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Časovni diagram

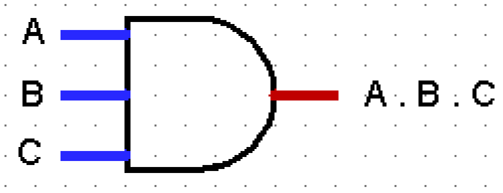


- Logična vrata



- **Konjunkcija (AND)** ima tri vhode **:** *A & B & C, A . B . C*

A	B	C	A . B . C
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1



- **Negacija (NOT): $\bar{x}$, x', ~x**

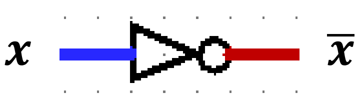
  Izhod = 1, če je vhod enak 0

  Izhod = 0, če je vhod enak 1

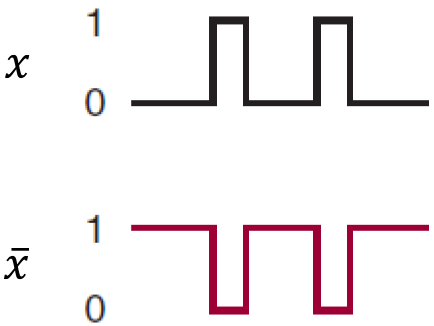
- Pravilnostna tabela

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

- Logična vrata

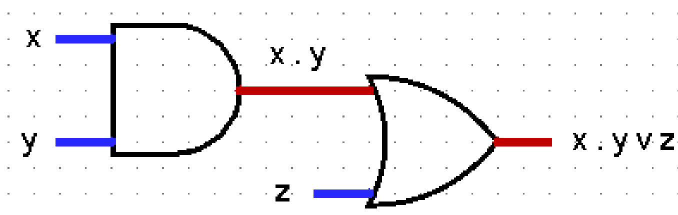


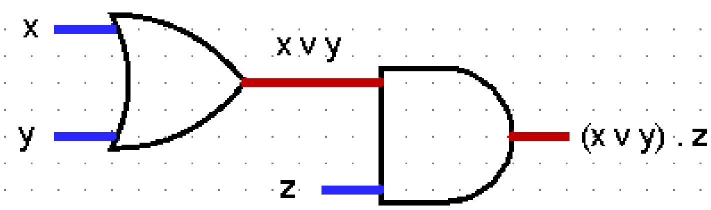
Časovni diagram



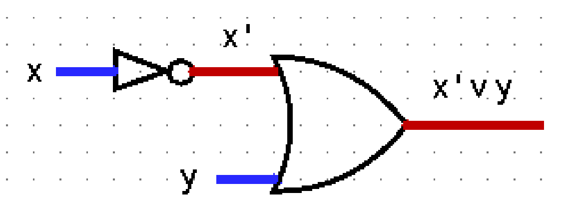
4 Algebraičen zapis logičnega vezja

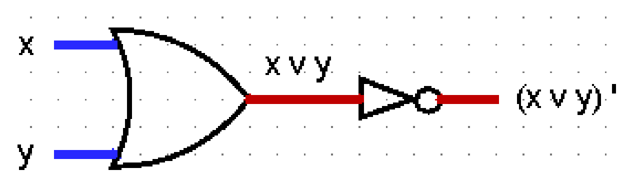
- Logična shema vezja z vrati AND in OR
  - a) AND in OR $(x.y) \vee z = x.y \vee z$ (oklepaj ni potreben)
  - b) OR in AND: $(x \vee y).z$ (oklepaj je obvezen)

a) 

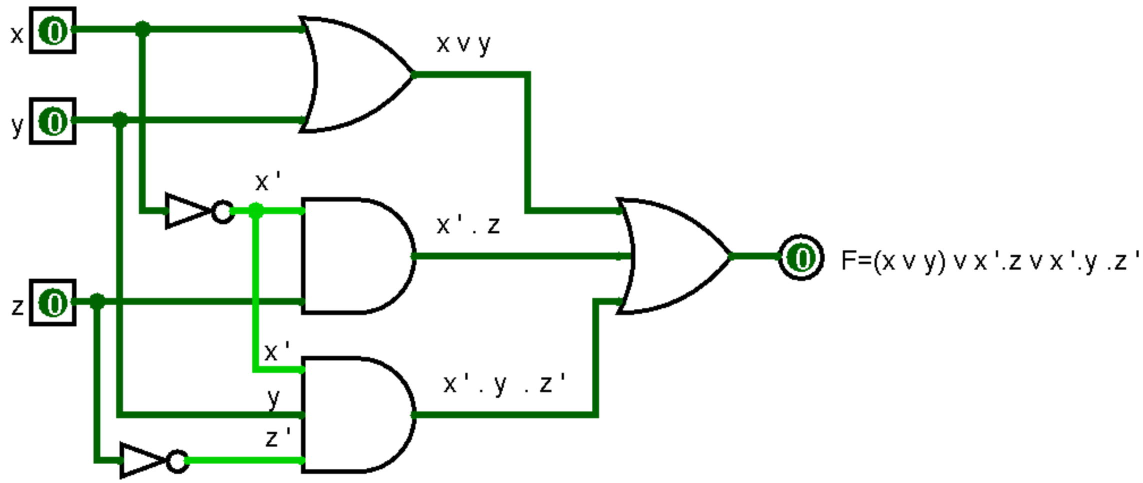
b) 

- Logična shema vezja z negatorji
  - a) spremenljivka je negirana: $\bar{x} \vee y$
  - b) funkcija je negirana: $\overline{x \vee y}$

a) 

b) 

- Logično vezje



- Algebraični zapis izhoda logičnega vezja $\mathrm{F} = (x \vee y) \vee \bar{x}.z \vee \bar{x}.y.\bar{z}$
- Kakšen je izhod F, če so vhodi x=0, y=1, z=0?

$$\mathrm{F} = (x \vee y) \vee \bar{x}.z \vee \bar{x}.y.\bar{z} =$$
$$= (0 \vee 1) \vee \bar{0}.0 \vee \bar{0}.1.\bar{0} = (0 \vee 1) \vee 1.0 \vee 1.1.1 = 1 \vee 0 \vee 1 = 1$$

- Kakšen je izhod F, če so vhodi x=1, y=0, z=0? **Izračunajmo.**

- Analiza vezja s pravilnostno tabelo (8 vhodnih kombinacij):

$$\mathrm{F} = (x \vee y) \vee \bar{x}.z \vee \bar{x}.y.\bar{z}$$

x	y	z	$x \vee y$	$\bar{x}.z$	$\bar{x}.y.\bar{z}$	F
0	0	0	0			
0	0	1	0			
0	1	0	1			
0	1	1	1			
1	0	0	1			
1	0	1	1			
1	1	0	1			
1	1	1	1			

X'

x	y	z	$x \vee y$	$\bar{x}.z$	$\bar{x}.y.\bar{z}$	F
0	0	0	0	0		
0	0	1	0	1		
0	1	0	1	0		
0	1	1	1	1		
1	0	0	1	0		
1	0	1	1	0		
1	1	0	1	0		
1	1	1	1	0		

$\bar{x}$ $\bar{z}$

x	y	z	$x \vee y$	$\bar{x}.z$	$\bar{x}.y.\bar{z}$	F
0	0	0	0	0	0	
0	0	1	0	1	0	
0	1	0	1	0	1	
0	1	1	1	1	0	
1	0	0	1	0	0	
1	0	1	1	0	0	
1	1	0	1	0	0	
1	1	1	1	0	0	

$$\mathrm{F} = (x \vee y) \vee \bar{x}.z \vee \bar{x}.y.\bar{z}$$

x	y	z	$x \vee y$	$\bar{x}.z$	$\bar{x}.y.\bar{z}$	F
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	1

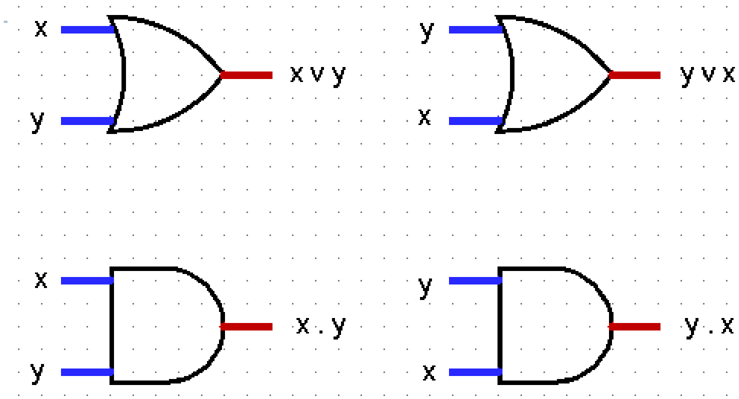
5 Booleova algebra – zakoni in izreki

- Matematično orodje za analizo in sintezo digitalnih logičnih vezij
- Operacije: NOT, AND, OR
- Zakoni:
  - Množica X vsebuje vsaj dva elementa $x, y \in X$, tako da velja $x \neq y$.
  - Zaprtost: Za vsak $x, y \in X$ velja: $x \vee y \in X$, $x \cdot y \in X$
  - Komutativnost
  - Distributivnost
  - Obstoj nevtralnih elementov (0 in 1)
  - Komplementarnost
- Izreki:
  - Dvojna negacija
  - Enakost
  - Asociativnost
  - Vsebovanost
  - DeMorganov izrek
  - …

- Komutativni zakon

  $x.y = y.x$

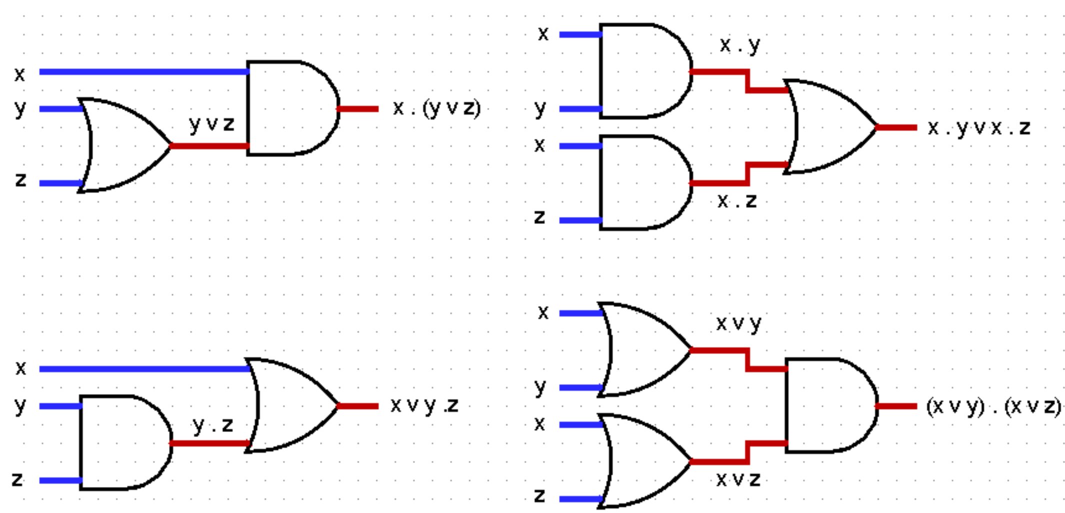
  $x \vee y = y \vee x$



- Distributivni zakon

  $x.(y \vee z) = (x.y) \vee (x.z) = x.y \vee x.z$

  $x \vee (y.z) = (x \vee y).(x \vee z)$

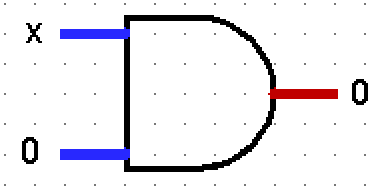


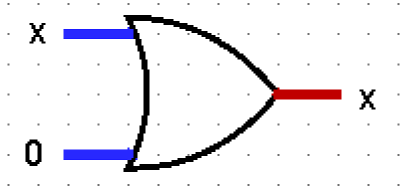
- Nevtralni element - konstanta 0

  $x.0 = 0$

  $x \vee 0 = x$

x	0	x.0=0	xv0=x
0	0	**0**	**0**
1	0	**0**	**1**



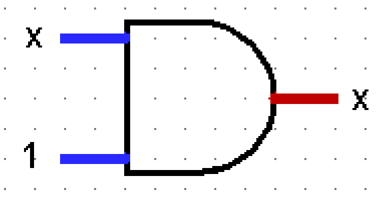


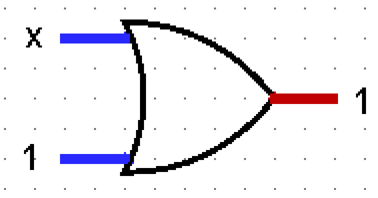
- Nevtralni element - konstanta 1

  $x.1 = x$

  $x \vee 1 = 1$

x	1	x.1=x	xv1=1
0	1	**0**	**1**
1	1	**1**	**1**



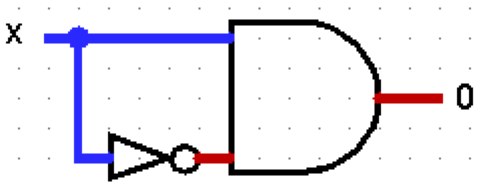


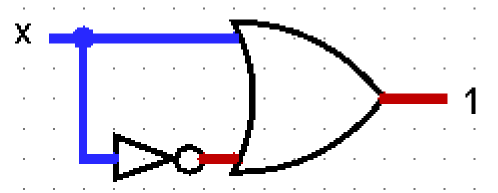
- Komplement (x in $\bar{x}$):

$$x.\bar{x} = 0$$

$$x \vee \bar{x} = 1$$

x	$\bar{x}$	$x.\bar{x}$	$x \vee \bar{x}$
0	1	**0**	**1**
1	0	**0**	**1**





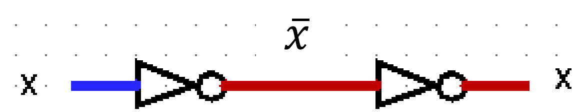
- Dvojna negacija ($\bar{\bar{x}}$):

$$\bar{\bar{x}} = \overline{(\bar{x})} = x$$

Dokaz: x=0: $\overline{(\bar{0})} = \bar{1} = 0$

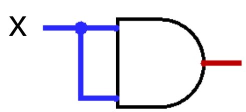
x=1: $\overline{(\bar{1})} = \bar{0} = 1$

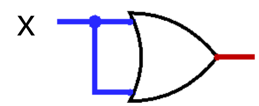
x	$\bar{x}$	$\bar{\bar{x}}$
0	1	**0**
1	0	**1**



- Enakost - velja za n=3,4, … spremenljivk

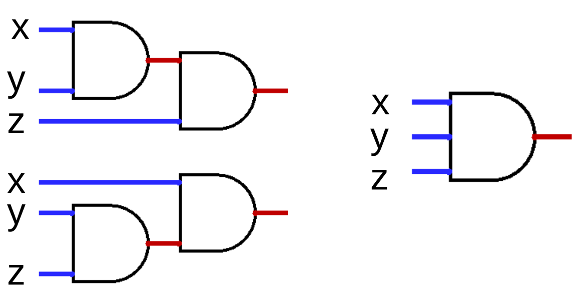
$x \,.\, x = x$ $\qquad\qquad$ $x \vee x = x$

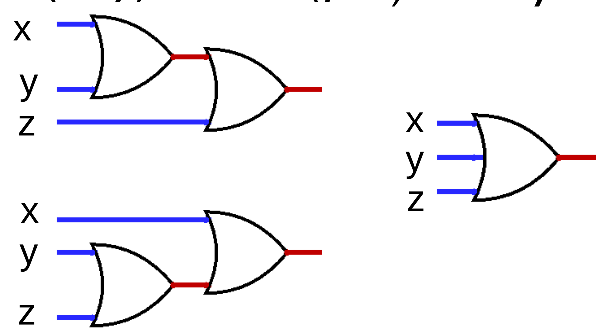




- Asociativnost - velja za n=3,4, … spremenljivk

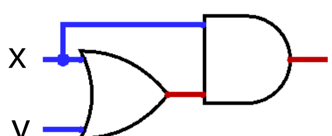
$(x.y).z = x.(y.z) = x.y.z$ $\qquad\qquad$ $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) = x \vee y \vee z$

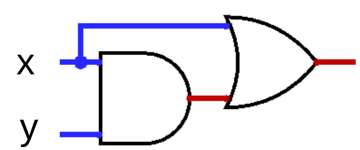




- Vsebovanost:

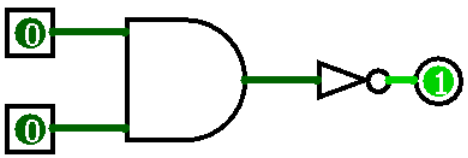
$x.(x \vee y) = x$ $\qquad\qquad$ $x \vee x.y = x$

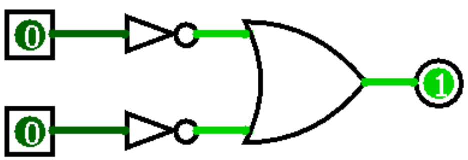




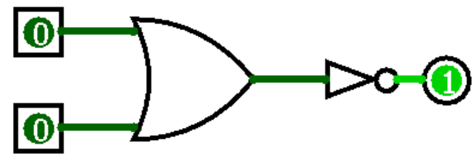
- DeMorganov izrek (negacija disjunkcije in negacija konjunkcije)

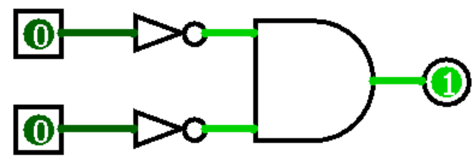
n = 2: $\overline{x.y} = \bar{x} \vee \bar{y}$





$\overline{x \vee y} = \bar{x}.\bar{y}$





n = 3, 4, … spremenljivk

$$\overline{x.y.z} = \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \qquad \overline{x \vee y \vee z} = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$$

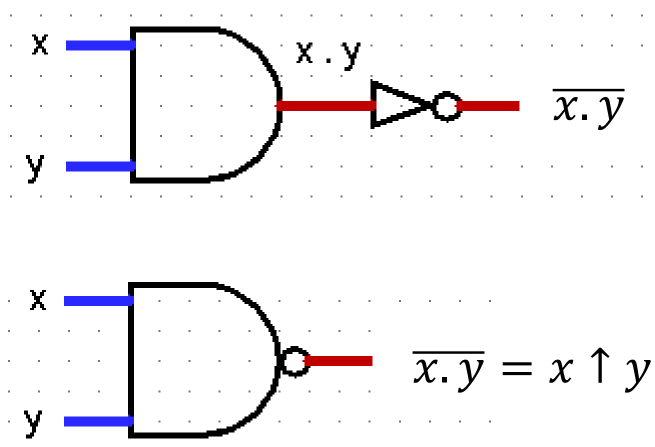
$$\overline{A.B.C.D} = \bar{A} \vee \bar{B} \vee \bar{C} \vee \bar{D} \qquad \overline{A \vee B \vee C \vee D} = \bar{A}.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}$$

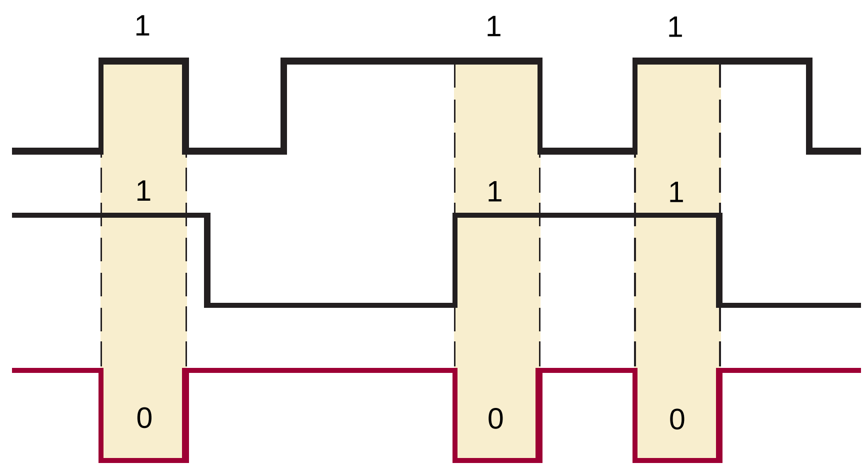
$\dots$

6 Logični operaciji in vrata NAND in NOR

- **Negirana konjunkcija (NAND):** $x \uparrow y$, $\overline{x.y}$, (x & y)‘ , (x . y)‘

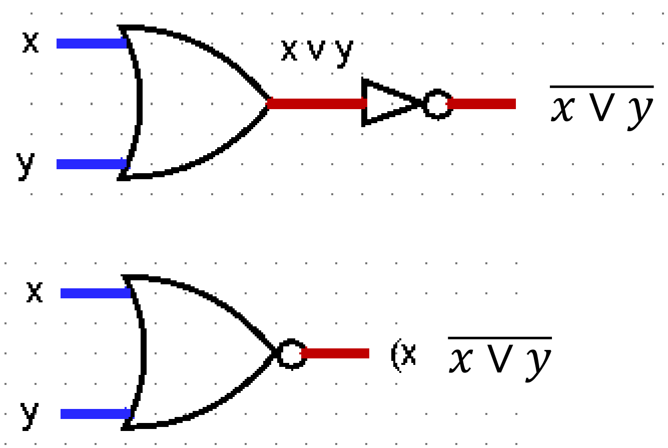
x	y	x . y	$\overline{x.y}$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

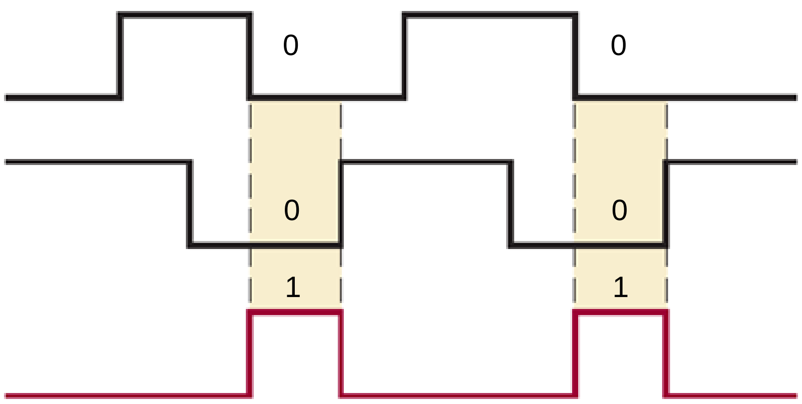




- **Negirana disjunkcija (NOR):** $x \downarrow y$, $\overline{x \vee y}$, (x v y)‘

x	y	x v y	$\overline{x \vee y}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0





7 Univerzalnost vrat NAND in NOR

- Vsaka logična funkcija z n spremenljivkami je lahko zapisana z uporabo operatorjev NOT, AND, OR.
- Nabor operatorjev NAND ali NOR je univerzalen, če je z njim mogoče zapisati vse osnovne logične funkcije v Booleovi algebri (NOT, AND, OR)
  - Univerzalnost vrat NAND - dokaz

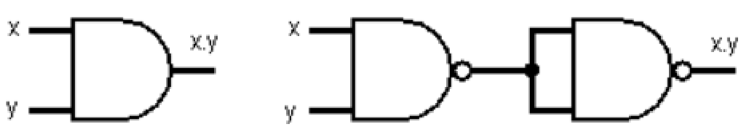
$$x \uparrow y = \overline{x.y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$

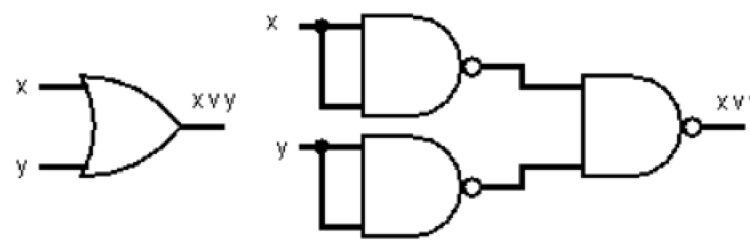
a) $\bar{x} = \overline{x.x} = x \uparrow x$

b) $x.y = \overline{\overline{x.y}} = \overline{x \uparrow y} = \overline{(x \uparrow y).(x \uparrow y)} = (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)$

c) $x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{\bar{x}.\bar{y}} = \bar{x} \uparrow \bar{y} = (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)$

a)


b)


c)


- Univerzalnost vrat NOR - dokaz

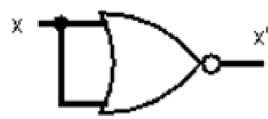
$$x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \bar{x}.\bar{y}$$

a) $\bar{x} = \overline{x \vee x} = x \downarrow x$

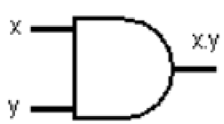
b) $x.y = \overline{\overline{x.y}} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = \bar{x} \downarrow \bar{y} = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$

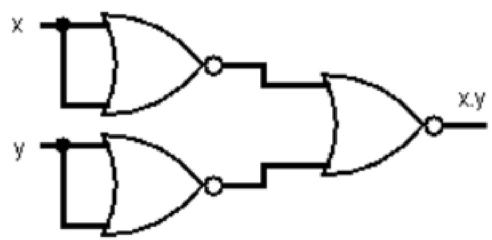
c) $x \vee y = \overline{\overline{x \vee y}} = \overline{x \downarrow y} = \overline{(x \downarrow y) \vee (x \downarrow y)} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$

a)

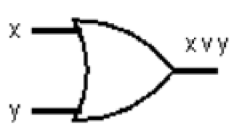


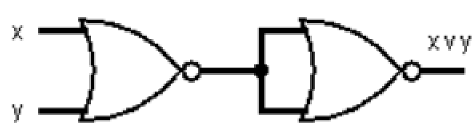
b)





c)





Povzetek

- Logične operacije in logična vrata
  - NOT (negacija): $\bar{x}$
  - AND (konjunkcija): $x.y$
  - OR (disjunkcija): $x \vee y$
  - NAND (negirana konjunkcija): $\overline{x.y} = \bar{x} \vee \bar{y}$
  - NOR (negirana disjunkcija): $\overline{x \vee y} = \bar{x}.\bar{y}$
- Booleova algebra
  - Zakoni
  - Izreki
- Logična vezja
  - Zapis logičnih funkcij
  - Analiza funkcij v tabeli
  - Analiza vezja v logični shemi

Naloga 1

- Poenostavitev izraza ali funkcije *f* z uporabo Booleove algebre.

$$f = \overline{x}.\overline{y}.\overline{z} \vee x.\overline{y}.\overline{z} \vee x.\overline{y}.z =$$
$$= \overline{y}.\overline{z}(x \vee \overline{x}) \vee x.\overline{y}.z =$$
$$= \overline{y}.\overline{z} \vee x.\overline{y}.z =$$
$$= \overline{y}.(\overline{z} \vee x.z) =$$
$$= \overline{y}.(\overline{z} \vee x)(\overline{z} \vee z) = \overline{\boldsymbol{y}}.(\overline{\boldsymbol{z}} \vee \boldsymbol{x}) \text{ ali } \overline{\boldsymbol{y}}.\overline{\boldsymbol{z}} \vee \overline{\boldsymbol{y}}.\boldsymbol{x}$$ (dva zapisa sta pravilna)

- Izrek - Dokaz enakosti

$$x \vee 1 = 1$$
$$(x \vee 1).1 = (x \vee 1).(x \vee \overline{x}) = x \vee 1.\overline{x} = x \vee \overline{x} = 1$$

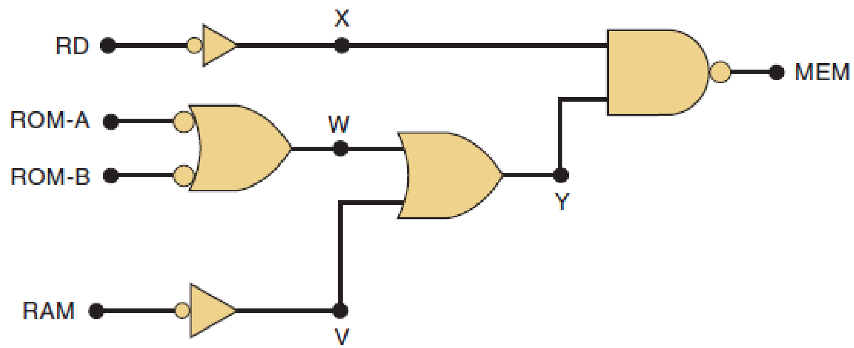
- Poenostavite podana logična izraza ali funkciji:

a) $(x \vee y)(y \vee z)(x \vee z).\overline{x} =$

b) $\overline{(x \vee y) \vee z(x \vee z)}.\overline{x} =$

Naloga 2

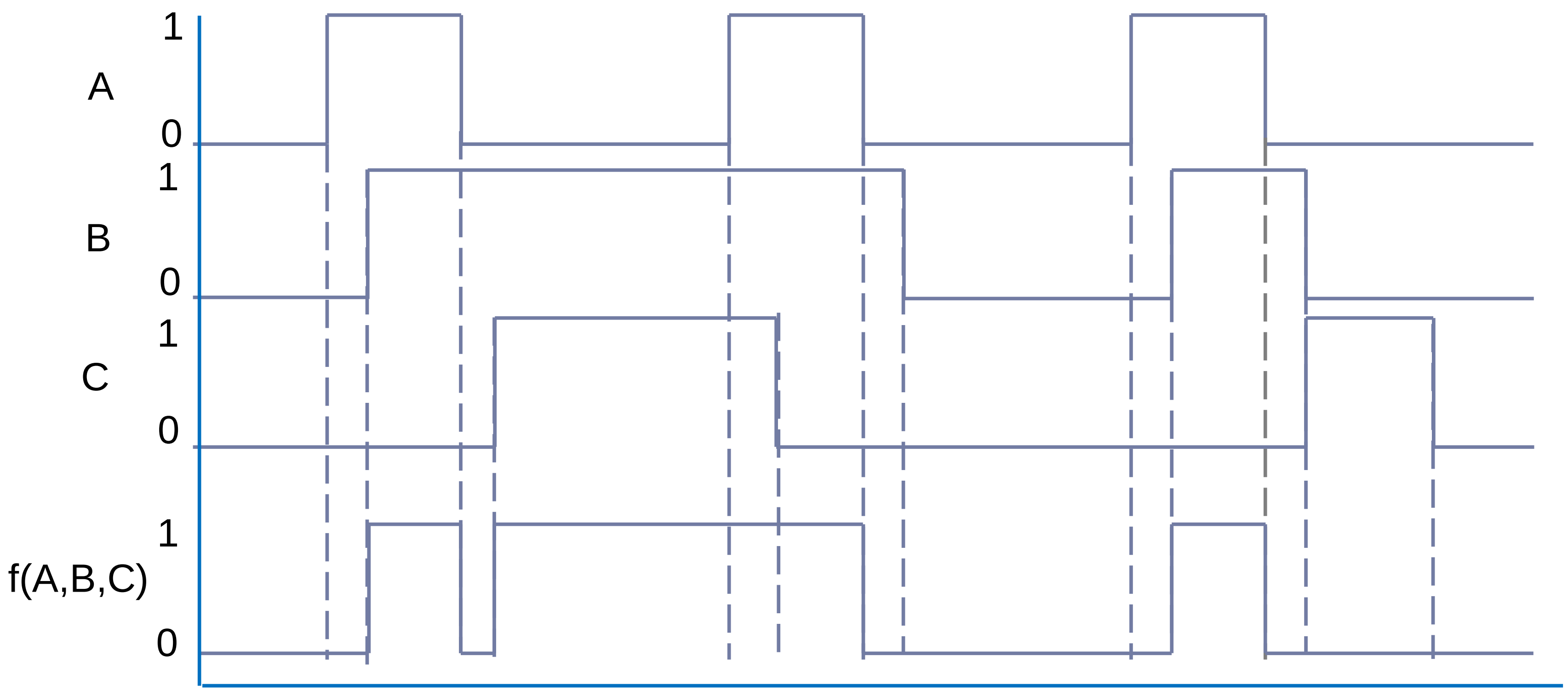
- Logično vezje generira izhodni signal MEM, ki se uporablja za aktiviranje integriranega vezja v določenem mikroračunalniku. Določite vhodne pogoje, ki so potrebni za aktiviranje MEM.



- Postopek a) Zapišemo logično funkcijo za MEM v pravilnostno tabelo.
- Postopek b) Interpretiramo delovanje vezja:
  - Signal MEM je aktiven-LOW in bo LOW v primeru, ko sta X in Y HIGH.
  - Signal X bo HIGH le, če bo RD = 0.
  - Signal Y bo HIGH, če bosta W ali V HIGH.
  - Signal V bo HIGH, ko bo RAM =0.
  - Signal W bo HIGH, če bo ROM-A = 0 ali ROM-B = 0.
  - Zaključek: MEM bo LOW le, če bo RD=0 in vsaj eden od vhodov ROM-A, ROM-B ali RAM je LOW.

Naloga 3

Podan je diagram spreminjanja izhoda vezja f(A,B,C) v odvisnosti od vhodov A,B,C.



Zapišite:

a) izhod vezja f (A,B,C) v pravilnostni tabeli z 0, 1 ali x (izhod ni določen).

b) kombinacije vhodov pri katerih ima izhod vrednost 1 in vrednost 0.

Rešitev v pravilnostni tabeli

A	B	C	f (A,B,C)
0	0	0	0
0	0	I	0
0	I	0	0
0	I	I	I
I	0	0	0
I	0	I	x
I	I	0	I
I	I	I	I

Funkcija f (A,B,C) ima vrednost 1, če so: B=C=1; A=B=1.

Funkcija f (A,B,C) ima vrednost 0, če so: A=B=0; A=C=0 in B=1; A=1 in B=C=0.

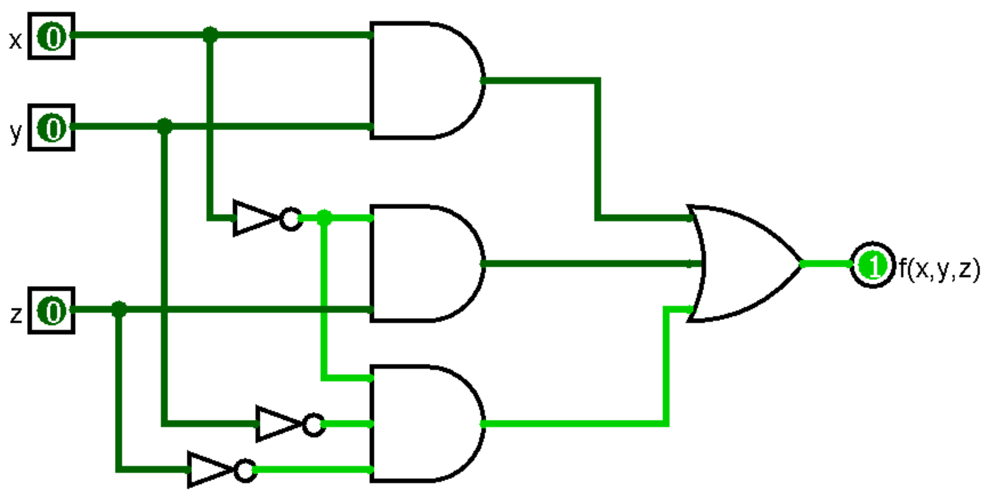
Izhod ni določen, če sta vhoda A=C=1 in vhod B=0.

Naloga 4

Podano je logično vezje z vhodi x, y, z.

Definirajte:

1. algebraični zapis izhoda f(x,y,z)
2. preverite ali ga lahko poenostavite z uporabo Booleove algebre.

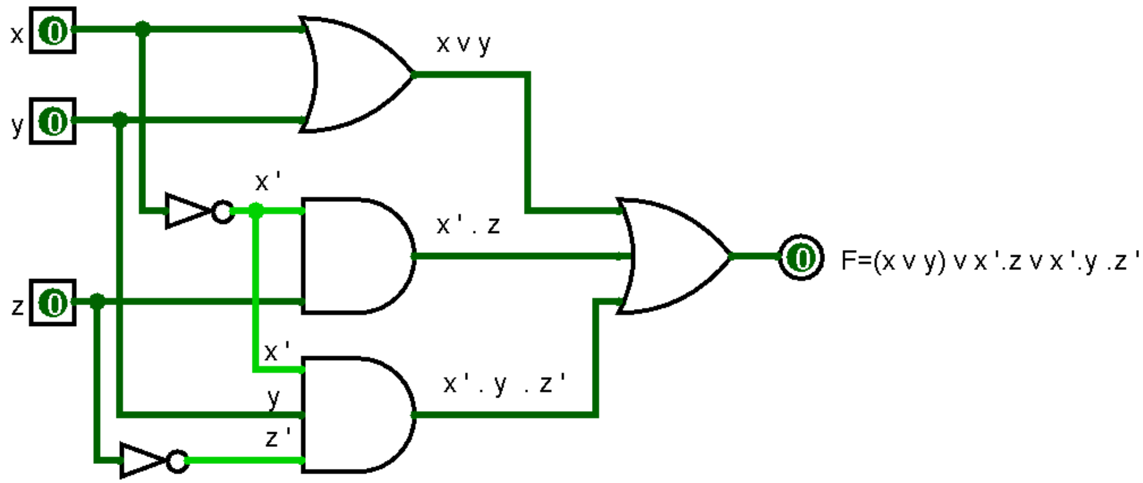


Rešitev:

1. $f(x, y, z) = x.y \vee \bar{x}.z \vee \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$
2. $f(x, y, z) = x.y \vee \bar{x}.z \vee \bar{x}.\bar{y}$

Naloga 5

- Podano logično vezje poenostavite z uporabo Booleove algebre



$$
\begin{aligned}
\mathrm{F} &= (x \vee y) \vee \bar{x}.z \vee \bar{x}.y.\bar{z} = \\
&= x \vee y \vee \bar{x}.z \vee \bar{x}.y.\bar{z} = x \vee y \vee \bar{x}.(z \vee y.\bar{z}) = \\
&= x \vee y \vee \bar{x}.(z \vee y).(z \vee \bar{z}) = x \vee y \vee \bar{x}.(z \vee y) = \\
&= x \vee y \vee \bar{x}.z \vee \bar{x}.y = x \vee \bar{x}.z \vee y \vee \bar{x}.y = \\
&= (x \vee \bar{x}).(x \vee z) \vee y.(1 \vee \bar{x}) = x \vee y \vee z
\end{aligned}
$$