Diskretne strukture

Dvanajsti sklop izročkov

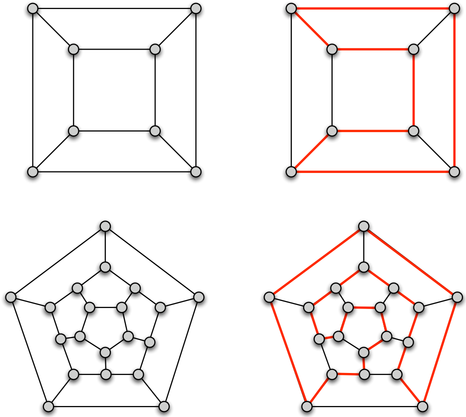
Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

23. december 2020

Cikel v grafu G je **Hamiltonov**, če vsebuje vse točke grafa G.

Spomnimo se: Cikel v grafu vsebuje vsaj 3 točke in gre skozi posamezno točko grafa največ enkrat.

Hamiltonov cikel gre skozi vsako točko natančno enkrat.



Kako prepoznati Hamiltonove grafe

Hamiltonov problem je mnogo težji kot Eulerjev. Ne obstaja enostavna karakterizacija Hamiltonovih grafov. To pomeni naslednje:

- Pokazati, da je graf G Hamiltonov je *relativno enostavno*. Potrebno je samo poiskati Hamiltonov cikel.
- Pokazati, da graf G ni Hamiltonov je *zelo težavno*. V splošnem je potrebno pregledati vse cikle v grafu, če se slučajno nekje med njimi ne skriva kakšen Hamiltonov cikel.

Spoznali bomo en potreben in en zadosten pogoj, da je graf Hamiltonov.

Definicija

Naj bo $G = (V(G), E(G))$ graf in $S \subseteq V(G)$ podmnožica vozlišč. Graf $G - S$ je graf z množico vozlišč $V(G) \setminus S$ in vsemi povezami iz $E(G)$, ki imata obe krajišči v $V(G) \setminus S$.

Izrek

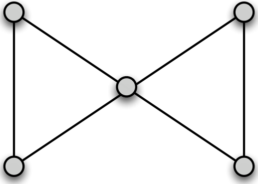
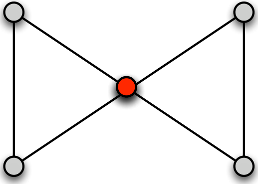
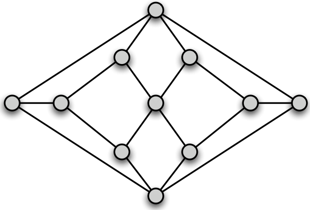
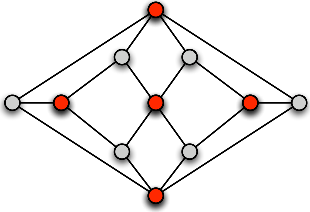
Naj bo G povezan graf. Denimo, da obstaja takšna podmnožica točk grafa $S \subseteq V(G)$ moči $|S| = k$, za katero velja, da ima

$$G - S$$

vsaj $k + 1$ povezanih komponent. Potem G ni Hamiltonov.

Toda! Če množica S iz izreka ne obstaja, to ne pomeni, da je graf Hamiltonov.

Zgledi

Potrebni pogoj z razpadom grafa ima v družini dvodelnih grafov naslednjo posledico.

Posledica

Naj bo G dvodelen graf z barvnima razredoma V_1 in V_2.
($V(G) = V_1 \cup V_2$, V_1 je množica 'belih', V_2 množica 'črnih' točk.)
Če je $|V_1| \neq |V_2|$, potem G ni Hamiltonov.

Diracov zadostni pogoj je naslednji:

Izrek (Dirac)

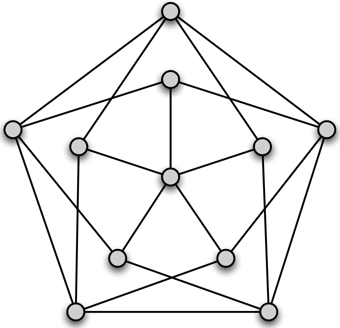
Naj bo G graf z vsaj tremi točkami ($|V(G)| = n \geq 3$).
Če za vsako točko

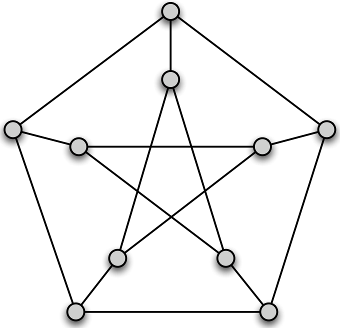
$$v \in V(G) \text{ velja } \deg(v) \geq \frac{n}{2},$$

potem je graf G Hamiltonov.

Komentar: Pogoj je zadosten. To pomeni, da je vsak graf, ki izpolni omenjeni pogoj tudi Hamiltonov. Ni pa res, da bi vsak Hamiltonov graf izpolnil zgornji pogoj.

Ali je kateri od naslednjih grafov, tj. lefi Grötzschev, desni Petersenov, Hamiltonov?





k-**barvanje** točk grafa G je preslikava

$$c : V(G) \to \{1, 2, 3, \ldots, k\},$$

za katero velja, da je $c(u) \neq c(v)$ za vsako povezavo $uv \in E(G)$.

To pomeni, da morata biti krajišči vsake povezave različnih barv.

Najmanjše naravno število k, za katerega obstaja k-barvanje točk grafa G, imenujemo **kromatično število grafa** G in ga označimo s $\chi(G)$.

Primer

1. $\chi(G) \leq |V(G)|$
2. $\chi(G) \leq 2 \Longleftrightarrow G$ *dvodelen*
3. $\chi(K_n) = n$, $\chi(\overline{K_n}) = 1$
4. $\chi(K_{m,n}) = 2$
5. $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ sod}, \\ 3, & n \text{ lih}. \end{cases}$

Z $\omega(G)$ označimo velikost največjega **polnega podgrafa** v G.

Velja $\omega(G) \leq 2$ natanko tedaj, ko je G brez trikotnikov.

$\Delta(G)$ označuje največjo stopnjo točke v grafu G.

Izrek

$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Velja celo boljši rezultat.

Izrek (Brooks)

Naj bo G povezan graf. Če G ni niti lih cikel niti poln graf, potem je $\chi(G) \leq \Delta(G)$

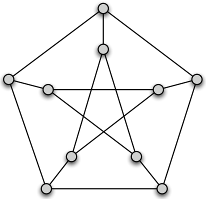
Problem: Skladiščimo nevarne kemikalije $K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n$.

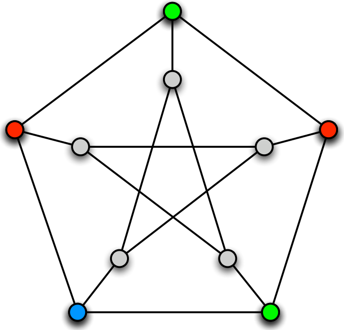
Predpisi določajo, da določenih nevarnih snov ne smemo skladiščiti skupaj. Poišči najmanjše potrebno število skladiščnih prostorov.

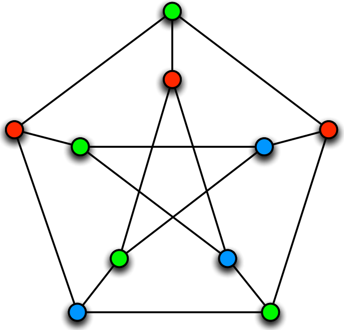
Rešitev:

- Sestavimo graf G s točkami $K_1, \ldots, K_n$.
- Dve točki-kemikaliji sta povezani, če ju ne smemo hraniti v istem prostoru.
- Barve ustrezajo skladiščnim prostorom.
- Iščemo najmanjše potrebno število barv.

Petersenov graf

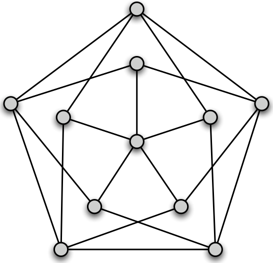


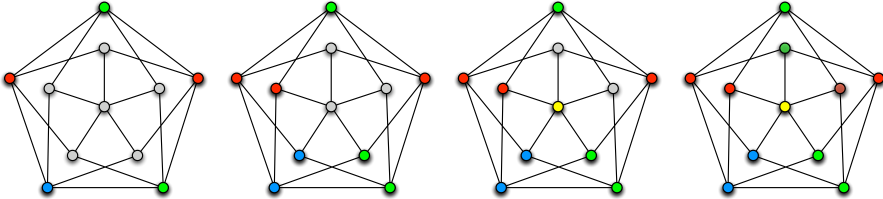




Kolikšno je njegovo kromatično število?

Grötzschev graf





Kolikšno je njegovo kromatično število?