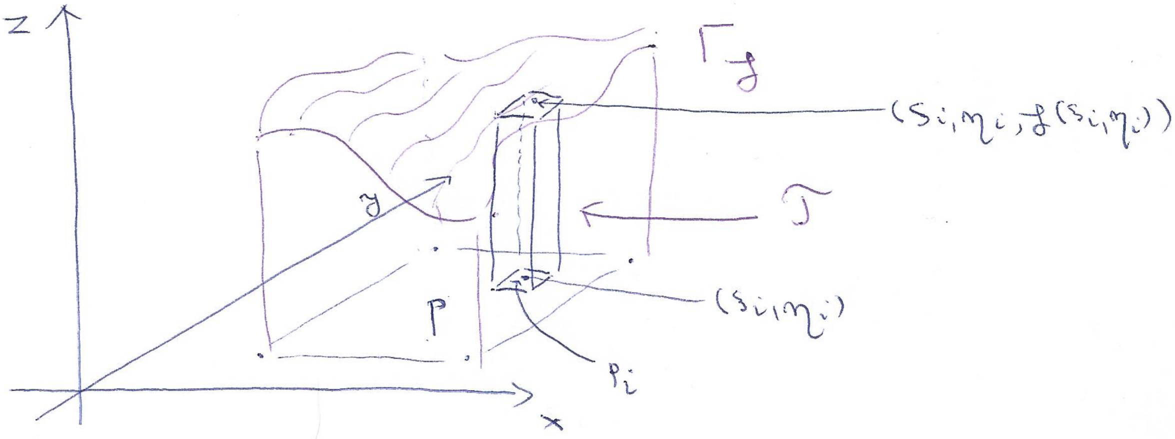
RIEMANNOV INTEGRAL V $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$

Naj bo $f: [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija 2 spremenljivk na pravokotniku $P=[a,b]\times[c,d]$. Zanima nas volumen telesa $T := \{(x,y,z): (x,y)\in P \text{ in } z\in[0,f(x,y)]\}$:



Pravokotnik P razdelimo na manjše pravokotnike $P_1,\dots,P_n$ in v vsakem izberemo točko $(\xi_i,\eta_i)\in P_i$. Telo T na P_i aproksimiramo s kvadrom z višino (ξ_i,η_i). Vsota volumnov kvadrov nad $P_1,\dots,P_n$ je

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\, pl(P_i),$$

kjer je $pl(P_i)$ ploščina pravokotnika P_i.

DVOJNI INTEGRAL funkcije $f: P \longrightarrow \mathbb{R}$ po P je število $I\in\mathbb{R}$, ki zadošča pogoju, da za vsak $\varepsilon>0$ obstaja $\delta>0$ tako, da za vsako delitev $P_1,\dots,P_n$ pravokotnika P, pri kateri so stranice P_i krajše od δ in vsako izbiro točk $(\xi_i,\eta_i)\in P_i$ velja

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\, pl(P_i)\right| < \varepsilon.$$

OZNAKA. $I = \iint\limits_P f(x,y)\,dx\,dy$.

- Če je A polj. omejena množica in $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija, potem poiščemo pravokotnik P, ki vsebuje A, in definiramo funkcijo $\tilde{f}: A \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in A, \\ 0, & (x,y) \in P \setminus A. \end{cases}$$

Potem je $\iint\limits_A f\,dx\,dy \underset{\text{def.}}{:=} \iint\limits_P \tilde{f}\,dx\,dy$.

- Analogno posplošimo do funkcij 3 spremenljivk.

Naj bo $f: K \longrightarrow \mathbb{R}$ funkcija 3 spremenljivk na kvadru $K = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$. Zanima nas masa kvadra K, pri čemer je f njegova gostota.

K razdelimo na manjše kvadrčke $K_1, \ldots, K_n$ in v vsakem izberemo točko $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in K_i$. Vsota mas kvadrov $K_1, \ldots, K_n$ je

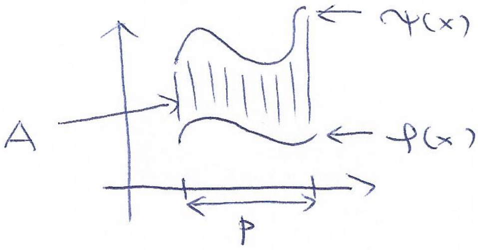
$$(**) \quad \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\,\mathrm{vol}(K_i),$$

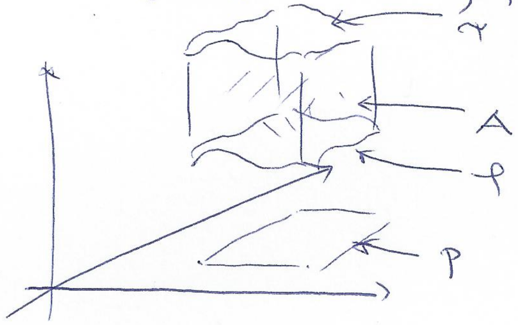
kjer je $\mathrm{vol}(K_i)$ volumen kvadra K_i.

TROJNI INTEGRAL $f: K \longrightarrow \mathbb{R}$, $\iiint\limits_K f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ je limita vsot $(**)$, ko dolžine stranic kvadrov konvergira proti 0, če obstaja.

Za poljubno omejeno množico $A \subseteq \mathbb{R}^3$ in funkcijo $f: A \to \mathbb{R}$ definiramo $\iiint_A f \, dx\,dy\,dz$ kot $\iiint_K \tilde{f} \, dx\,dy\,dz$, kjer je K kvader, ki vsebuje A, in $\tilde{f} = \begin{cases} f, & \text{na } A, \\ 0, & \text{na } K \setminus A. \end{cases}$

RAČUNANJE. Naj bo P daljica ali pravokotnik in $\varphi, \psi : P \to \mathbb{R}$ zvezni funkciji, da velja $\varphi(x) \leq \psi(x)$ za vsak $x \in P$. Naj bo $A = \{(x,y) : x \in P, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$.

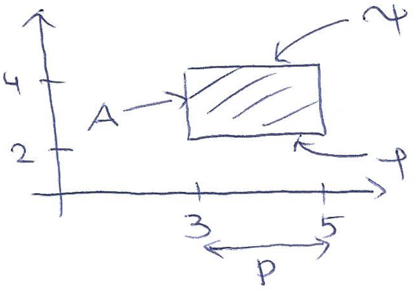




Velja $\int_A f = \int_P \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$.

PRIMER. $\iint_A (x^2 + xy)\,dx\,dy$

$A = \{(x,y) : 3 \leq x \leq 5, \; 2 \leq y \leq 4\}$



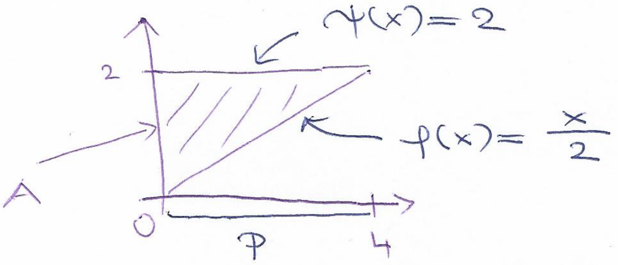
$$\iint_A (x^2+xy)\,dx\,dy = \int_P \left(\int_2^4 (x^2+xy)\,dy \right) dx$$

$$= \int_P \left[x^2 y + x \frac{y^2}{2} \right]_2^4 = \int_P \left(x^2(4-2) + x \frac{(4^2-2^2)}{2} \right) dx$$

$$= \int_3^5 (2x^2 + 6x)\,dx = \left[\frac{2x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} \right]_3^5 =$$

$$= \frac{2}{3}(5^3 - 3^3) + 3(5^2 - 3^2) = \underline{\underline{\frac{340}{3}}}$$

PRIMER. $\iint_A (x^2+xy)\,dx\,dy$



$$\iint_A (x^2+xy)\,dx\,dy = \int_0^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{2} (x^2+xy)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^4 \left[x^2 y + x\frac{y^2}{2} \right]_{\frac{x}{2}}^{2} dx$$

$$= \int_0^4 \left(2x^2 - \frac{x^3}{2} + 2x - \frac{x^3}{8} \right) dx$$

$$= \left[2\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2} \right]_0^4$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 4^3 - \frac{3}{4}\cdot\frac{4^4}{4} + 4^2 = \underline{\underline{\frac{56}{3}}}$$

PRIMER. $\iiint_A (x+y+z)\,dx\,dy\,dz$

$$A = \{ (x,y,z) : 2(x^2+y^2) \leq z \leq 4(x^2+y^2),\ 3 \leq x \leq 5,\ 4 \leq y \leq 6 \}$$

$$P = [3,5]\times[4,6], \quad \psi(x) = 4(x^2+y^2), \quad \varphi(x) = 2(x^2+y^2)$$

$$\iiint_A (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \iint_P \left(\int_{2(x^2+y^2)}^{4(x^2+y^2)} (x+y+z)\,dz \right) dx\,dy =$$

$$= \int_3^5 \int_4^6 \left[xz + yz + \frac{z^2}{2} \right]_{2(x^2+y^2)}^{4(x^2+y^2)} dy\,dx$$

$$= \int_3^5 \int_4^6 \Bigg(\underbrace{(x+y)\big(4(x^2+y^2) - 2(x^2+y^2)\big)}_{2(x+y)(x^2+y^2)} + \underbrace{\frac{1}{2}\Big((x^2+y^2)^2 4^2 - (x^2+y^2)^2 2^2 \Big)}_{\frac{1}{2}(12x^4 + 24x^2y^2 + 12y^2)} \Bigg) dy\,dx$$

$$2x^3 + 2xy^2 + 2yx^2 + 2y^3$$

$$= \int_3^5 \left[2x^3 y + 2x\frac{y^3}{3} + 2\frac{y^2}{2}x^2 + 2\frac{y^3}{4} + 6\frac{x^5}{5}y + 12x^2\frac{y^3}{3} + 6\frac{y^3}{3} \right]_4^6$$

$$= \int_3^5 \left(2x^3(6-4) + 2x\frac{(6^3-4^3)}{3} + \frac{2(6^2-4^2)}{2}x^2 + 5\frac{6^3-4^3}{2} + 6x^4\cdot 2 + 12x^2\frac{6^3-4^3}{3} \right) dx$$

$$= \dots = \frac{690464}{15}.$$

UPORABA.

1. PLOŠČINA OBMOČJA D V RAVNINI

$$p(D) = \iint_D 1 \, dx\,dy$$

2. MASA PLOŠČE V RAVNINI

D .... območji, kjer leži plošča

$\rho : D \to \mathbb{R}$ ploskovna gostota plošče

$$m = \iint_D \rho \, dx\,dy$$

3. TEŽIŠČE PLOŠČE

$$x_T = \frac{\iint_D x \, \rho(x,y)\, dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\, dx\,dy}$$

$$y_T = \frac{\iint_D y \, \rho(x,y)\, dx\,dy}{\iint_D \rho(x,y)\, dx\,dy}$$

4. PROSTORNINA TELESA

$D \subseteq \mathbb{R}^3$ območje z volumnom

$$V(D) = \iiint_D 1 \, dx\,dy\,dz$$

5. MASA TELESA

$$m = \iiint_{\underset{\text{OBMOČJE}}{D}} \underset{\text{GOSTOTA}}{\rho} \, dx\,dy\,dz$$

6. TEŽIŠČE TELESA