· Ime in priimek: ______________________ Vpisna številka: __________________

# Prvi rok iz DS - teoretični del, 20.01.2020

- Čas pisanja: **30 minut**
- Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50% vseh točk. V oglatih oklepajih [·] je pri vsakem vprašanju navedeno, koliko točk šteje pravilen odgovor.
- Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani.

1. **[30 točk]**

(a) Navedite nabor izjavnih veznikov z vsaj 2 veznikoma, ki ni poln. Odgovor utemeljite.
Pravilni odgovori so npr. $\{\vee, \wedge\}$, $\{\vee, \Rightarrow\}$, $\{\wedge, \Leftrightarrow\}$. Vsi ohranjajo logično vrednost 1. Pri ohranja tudi logično vrednost 0.

- Če ste navedli pravilen nabor, ste dobili 5 točk. Za pravilno utemeljitev pa še 5 točk.
- Če ste v naboru uporabljali tudi 0 ali 1, ki nista veznika, pač pa konstanti, ste dobili za pravilen odgovor z utemeljitvijo 7 točk.

(b) Utemeljite, da je nabor izjavnih veznikov $\{\neg, \wedge, \vee\}$ poln.
(Namig: pomagate si lahko z obstojem konjuktivne ali disjunktivne normalne oblike.)
Ker ima vsak izjavni izraz enakovreden izjavni izraz v KNO oz. DNO, ki uporabita samo veznike $\{\neg, \wedge, \vee\}$, je nabor $\{\neg, \wedge, \vee\}$ poln.

- Za pravilno rešitev ste dobili 10 točk.
- Za sklic na polnost nabora $\{\neg, \vee\}$ or $\{\neg, \wedge\}$ niste dobili točk.
- Če ste navedli primer KNO ali DNO nekega izraza, ste dobili 3 točke.

(c) Naj bosta $I$ in $J$ izjavna izraza. Pri sklepu s protislovjem pravilnost sklepa $I \models J$ preverimo s pravilnostjo sklepa $I, \neg J \models 0$. Razloži, zakaj to lahko naredimo.

- $I \models J$ je pravilen sklep natanko tedaj, ko ne obstaja nabor spremenljivk, pri katerih bi imel $I$ vrednost 1, $J$ pa 0.
- $I, \neg J \models 0$ je pravilen sklep natanko tedaj, ko ne obstaja nabor spremenljivk, pri katerih bi imela $I$ in $\neg J$ oba vrednost 1. Zadnje pa je enakovredno dejstvu, da ima $I$ vrednost 1, $J$ pa 0.
- Zadnji enakovrednosti obeh zgornjih točk sta enaki, iz česar sledi pravilnost sklepa s protislovjem

- Za pravilno rešitev ste dobili 10 točk.
- Če ste omenili pravilo Modus Tollens (MT), niste pa znali pravilno razložiti, kako sklep sledi iz MT, ste dobili 3 točke.

---

2. **[35 točk]** Naj bo $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ množica.

(a) Napišite primer relacije $R \subseteq A \times A$ z natanko tremi elementi.
Pravilen odgovor $R = \{(a, b), (c, d), (e, f)\}$, kjer so $a, b, c, d, e, f$ katera koli števila (ne nujno različna) iz $A$.
Za pravilno rešitev ste dobili 8 točk.

(b) Najmanj koliko elementov ima refleksivna relacija $R \subseteq A \times A$? Odgovor utemeljite.
Najmanj 5, tj. $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)$. Lahko pa še katerega koli od preostalih.

- Za pravilno rešitev ste dobili 10 točk.
- Če ste navedli samo dejstvo, da mora biti vsak element v relaciji s sabo, ste dobili 3 točke.
- Če ste navedli, da ima lahko relacija kvečjemu elemente $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)$, ste dobili 5 točk.

(c) Največ koliko elementov ima lahko relacija $R \subseteq A \times A$? Odgovor utemeljite.
25, saj je različnih elementov $A \times A$ ravno $25 = 5^2$.

- Za pravilno rešitev ste dobili 10 točk.
- Če ste navedli, da je število elementov toliko, kot je moč $A \times A$, niste pa tega izračunali, ste dobili 8 točk.

(d) Koliko različnih dvomestnih relacij na množici $A$ obstaja? Odgovor utemeljite.
Vsak izmed elementov iz $A \times A$ je bodisi element $R$ bodisi ni. Torej je različnih relacij $2^{\text{št. elementov } A\times A} = 2^{25}$.

- Za pravilno rešitev ste dobili 7 točk. Tudi, če ste odšteli prazno relacijo in navedli kot rešitev $2^{25}-1$, je to štelo za vse točke.

---

3. **[35 točk]**

(a) Narišite primer dvodelnega grafa, ki je Eulerjev.
Npr. cikel na 4 točkah.

- Za pravilno rešitev ste dobili 12 točk.

(b) Pojasnite, zakaj dvodelni graf na 12 točkah s 5 belimi in 7 črnimi točkami, ni Hamiltonov.
Če odstranimo vseh 5 belih točk, graf razpade na 7 komponent. Po izreku o razpadu zato prvotni graf ni Hamiltonov.

- Za pravilno rešitev ste dobili 13 točk.
- Če se niste sklicali na izrek o razpadu, pač pa navedli le, da ostane 7 nepovezanih komponent oz. izoliranih točk, ste dobili 7 točk.
- Kot pravilno je štela tudi utemeljitev, da sta na ciklu barvi sosednjih vozlišč različni in zato na sprehodu, na katerem se vozlišča ne ponavljajo, lahko prehodimo samo 6 točk črne in 5 točk bele barve.

(c) Koliko različnih Hamiltonovih ciklov ima poln graf na 5 točkah? Pri tem cikla štejemo za različna, če se razlikujeta vsaj v eni uporabljeni povezavi.
Fiksirajmo neko vozlišče. Cikel lahko začnemo po kateri koli od 4 povezav. V naslednjem vozlišču izbiramo med 3 preostalimi, nato 2, zadnja povezava pa je določena. Upoštevati moramo še, da smo vsak cikel dvakrat šteli, saj smo ga lahko prepotovali v eno ali v druge smer, tj. $v_1v_3v_5v_4v_2$ je isti cikel kot $v_1v_2v_4v_5v_3$. Imamo $\frac{4\cdot3\cdot2}{2} = 12$ ciklov.

- Za pravilno rešitev ste dobili 10 točk.
- Če ste pozabili upoštevati deljenje z 2 (in navedli kot rešitev 24), ste izgubili 2 točki.
- Če ste narisali $K_5$ in nekaj ciklov, ste dobili največ 2 točki.
- Če ste kot rezultat navedli $5!$, ste dobili 3 točke.