RT 2021: Domače naloge

Rok Žitko

1 Valovni paket

Napiši program za seštevanje ravnih valov $y(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \sin(k_i x)$. Kako za dan n izbrati amplitude A_i in valovna števila k_i, da dobimo čim bolj lokaliziran valovni paket? Povprečno valovno število $1/n \sum_{i=1}^{n} k_i$ naj bo fiksirano na 1. Fiksirana naj bo tudi normalizacija na intervalu $[0 : 2\pi]$, denimo $\int_0^{2\pi} y^2(x)dx = 1$.

2 Simulacija nehomogene verige sklopljenih nihal

Imejmo sistem $N = 1000$ z vzmetmi povezanih nihal, ki jih opišemo z enačbami (razdelek 1.10)

$$-K(\psi_n - \psi_{n-1}) - K(\psi_n - \psi_{n+1}) = m_n \ddot{\psi}_n, \tag{1}$$

za $n = 1, \ldots, N$, dodatno pa velja še $\psi_{N+1} = 0$ in $\psi_0 = A\sin(\omega t)$. Mase nihal m_n so lahko različne. Na začetku vsa nihala mirujejo, $\psi_n(t = 0) = \dot{\psi}_n(t = 0) = 0$ za $n = 1, \ldots, N$.

a) Reši program, ki bo računal časovno dinamiko sistema nihal z metodo končnih korakov (razdelek 1.1). Preizkusi ga za primer enakih mas, $m_n \equiv m$. Kaj se zgodi z valovanje, ko pride do desnega roba? Za lažje računanje izberi $K = m = 1$, primerni vrednosti za ω in A pa poišči sam!

b) Kaj se zgodi, če obravnavamo isti problem, a se mase nihal razlikujejo? Zapiši $m_n = 1 + \delta m_n$, kjer dodatne mase δm_n naključno izžrebaš v nekem izbranem intervalu $[-a : a]$. Kaj se zgodi s povečevanjem širine intervala $2a$?

3 Kvantni Zenov paradoks

Imejmo spin, ki kaže ob času 0 vzdolž smeri osi x, torej $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$. Imejmo polje vzdolž osi z, tako da je stanje po času T enako (razdelek 3.21)

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\omega_0 t/2} |\uparrow\rangle + e^{i\omega_0 t/2} |\downarrow\rangle \right). \tag{2}$$

V tem trenutku opravimo meritev komponente spina vzdolž osi x. Rezultat določa Bornovo pravilo (razdelek 3.14), ob meritvi pa pride do kolapsa valovne funkcije (razdelek 3.17), pri čemer je treba upoštevati, da obstajata dva možna rezultata meritve. Nato postopek večkrat ponovimo: počakamo T in pomerimo ponovno, etc. Cilj te naloge je napisati program, ki bo simuliral rezultate zaporednih meritev. Naj bo $\omega_0 = 2\pi$.

a) Napiši program, ki določi verjetnosti za oba možna izzida meritve komponente spina vzdolž smeri x. Izžrebaj meritev skladno s tema verjetnostima in napiši rutino, ki določa novo valovno funkcijo (po kolapsu na lastno stanje operatorja spina v smeri x). Program naj izpisuje zaporedje rezultatov za izbrano vrednost T.

b) Prouči, kako se rezultati obnašajo za različne T. Zanimivi izbiri sta denimo $T = 0.5$ (polovica periode) in $T = 0.25$ (četrt periode).

c) Kaj pa se dogaja, če je T čedalje manjši? Pojav se imenuje kvantni Zenov paradoks.

4 Schmidtov razcep in entropija prepletenosti

Schmidtov razcep ja operacija, pri kateri vektor iz produktnega prostora zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev iz posameznih prostorov:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |u_i\rangle \otimes |v_i\rangle, \tag{3}$$

kjer je n dimenzija posameznega prostora ($n = 2$ za kubite), $|u_i\rangle$ in $|v_i\rangle$ pa vektorja iz posameznih prostorov. Če je od nič različna le ena vrednosti α_1, potem je stanje separabilno, sicer pa je vsaj delno prepleteno. V splošnem jakost kvantne prepletenosti kvantificiramo z entropijo prepletenosti:

$$S = -\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 \log(|\alpha_i|^2). \tag{4}$$

Napiši program, ki naključno generira pare kubitov $\psi = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle$ z amplitudami c_{ij}, ki so enakomerno naključno porazdeljene v intervalu $[0 : 1]$, vektorje normira, izračuna koeficiente α_i in nato še entropijo S. Določi histogram vrednosti S za 10000 realizacij.

5 Meritev naključnih kubitov

Napiši program, ki naključno generira točke na sferi. Izračunaj povprečne vrednosti spremenljivk x, y, z, x^2, y^2 in z^2 (recimo za 10000 naključnih točk). Napiši še program, ki naključno generira stanja na Blochovi sferi. Izračunaj povprečne vrednosti opazljivk X, Y, Z, X^2, Y^2 in Z^2.

Kako se rezultati razlikujejo, če točke niso generirane z enakomerno porazdelitvijo po površini?

6 Preizkuševalec bomb

Napiši program za simulacijo problema preizkuševalca bomb. Imamo 1000 bomb, polovica je delujočih, polovica pokvarjenih. Vsako vstavimo v en krak Mach-Zenderjevega detektorja. Simulirati moramo rezultate kvantnomehanskih meritev. V primeru pokvarjene bombe je meritev ena sama: foton pade na detektor A ali B. V primeru delujoče bombe sta meritvi dve: najprej na bombi (je foton prisoten ali ni?), če ne pride do eksplozije pa še na detektorju (foton na A ali na B?).

a) Koliko delujočih bomb lahko odbereš v povprečju?

b) Premisli, kako bi lahko odbral še večji delež! Sprogramiraj simulator tudi za takšen boljši način.

7 Simulacija spina v časovno odvisnem polju

V razdelku 3.21 učbenika je zapisana splošna rešitev za časovno odvisnost stanja spina v konstantnem (po času) magnetnem polju. Časovno odvisno polje lahko obravnavamo tako, da to rešitev uporabimo za kratke časovne intervale Δt.

a) Na ta način obravnavaj dinamiko spin v časovno spremenljivem polju $B = B_0 \cos(\omega t)$ vzdolž osi z. Oglej si rešitve za različne izbire začetnega kota θ, začetni ϕ pa naj bo 0.

b) Primerjaj primere $\omega < \omega_0$, $\omega = \omega_0$ in $\omega > \omega_0$!

8 Vezano stanje za ozek privlačen potencial

Numerično reši stacionarno Schroedingerjevo enačbo za primer potenciala, ki je povsod enak nič, le v bližini izhodišča je močno privlačen. Potencial lahko opišeš z Gaussovo funkcijo, katere širino zmanjšuješ, globino pa povečuješ, tako da je integral ves čas konstanten. Ugotovi, h kateri funkciji rezultat (valovna funkcija) konvergira z zmanjševanjem širine!

9 Kvantno nihalo

Numerično reši stacionarno Schroedingerjevo enačbo za matematično nihalo:

$$-\frac{\hbar^2}{2ml^2}\frac{d^2\psi}{d\phi^2} + mgl(1-\cos\phi)\psi = E\psi, \tag{5}$$

kjer je m masa uteži, l dolžina vrvice, g gravitacijski pospešek. Valovna funkcija $\psi(\phi)$ je definirana na intervalu $[0 : 2\pi]$.

10 Časovno odvisna Schroedingerjeva enačba za naključno začetno valovno funkcijo

Napiši program za reševanje časovno odvisne Schroedingerjeve enačbe v eni dimenziji. Kot začetno stanje si izberi valovno funkcijo, ki jo dobiš tako, da njene vrednosti naključno izbereš v točkah diskretizacijske mreže na intervalu $[0 : 1]$, drugod pa naj bo enaka nič.

a) Kako se obnaša rešitev po kratkem času?

b) Kako po zelo dolgem?

11 Naključne matrike

Napiši program, ki matriko generira tako, da vsak matrični element $m_{i,j}$ z $1 \leq i <= j < n$ izbere naključno na intervalu $[-1 : 1]$, in da velja $m_{j,i} = m_{i,j}$, tako da je matrika simetrična.

a) Izračunaj lastne vrednosti in nariši njihovo porazdelitev (histogram) za zadosti velik n, vsaj $n = 1000$.

b) Poskusi n čim bolj povečati. Do kako velikih vrednosti so računi še praktično izvedljivi na računalniku, ki ga imaš na voljo?