Linearni sistemi in linearno programiranje

S pomočjo **linearnih sistemov enačb (in neenačb)** rešujemo tudi mnoge druge probleme. V nadaljevanju opisani problemi in način reševanja spadajo v poglavje tako imenovanega **linearnega programiranja**.

Naloga: Na zalogi imamo 15 kg preparata P1 in 24 kg preparata P2. Iz teh dveh preparatov mešamo 'čistila' v paketih po 200 g. Pri zavojčkih 'Normal', v katere zmešamo po 50 g preparata P1 in 150 g preparata P2, imamo po 2,50 EUR dobička na zavojček. Nekoliko kvalitetnejši zavojčki 'Extra', v katere zmešamo po 100 g preparata P1 in 100 g preparata P2, pa prinašajo po 4,50 EUR dobička na zavojček. Zanima nas, kako naj zapakiramo zalogo preparatov P1 in P2, da bo dobiček čim večji.

Ureditev podatkov

Uredimo podatke

	Normal	Extra	Zaloga
$P1$	50	100	15 000
$P2$	150	100	24 000
Dobiček	$2,5$	$4,5$	
	x	y	

pri čemer smo količine pisali v gramih, neznano število zapakiranih paketov 'Normal', oziroma 'Extra' pa smo označili s spremenljivkama x in y.

Naloga - nadaljevanje

Podatke iz tabele zapišemo matematično s pogoji:

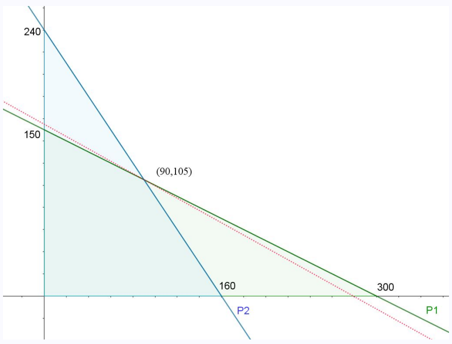
	Normal	Extra	Zaloga
$P1$	50	100	15 000
$P2$	150	100	24 000
Dobiček	$2,5$	$4,5$	
	x	y	

$$\longrightarrow \quad \begin{aligned} P1 &: 50x + 100y \leq 15\,000 \\ P2 &: 150x + 100y \leq 24\,000 \\ &\text{Dobiček} = 2,5x + 4,5y \end{aligned}$$

Poenostavimo:

$$\begin{aligned} P1 : y &\leq 150 - \tfrac{1}{2}x \\ P2 : y &\leq 240 - \tfrac{3}{2}x \\ y &= \tfrac{Dob}{4,5} - \tfrac{5}{9}x \end{aligned}$$

in skiciramo.



Področje, ki je pod obema premicama je 'dopustno območje'. Vsaka točka (x, y) na tem območju pomeni količino paketov Normal (x) in Extra (y), ki jih glede na zalogo lahko zapakiramo. Premica dobička (rdeča) zaradi smernega koeficienta $\frac{5}{9}$ določa največji dobiček v točki $(90, 105)$, ki je enak $90 \cdot 2,5 + 105 \cdot 4,5 = 697,5$. Pri podobnih nalogah je maksimum vedno dosežen v eni izmed vogalnih točk 'dopustnega območja'.

Naloga za vajo

- Na voljo imamo dve vrsti ‘prehrambenih dodatkov’. V prvi, ki stane 50 EUR, je 200 enot vitaminov, 100 enot mineralov in 400 kalorij , v drugi, ki stane 30 EUR, pa je 100 enot vitaminov, 200 enot mineralov in 400 kalorij. ’Pacient’ mora dobiti vsaj 400 enot vitaminov, 500 enot mineralov in 1400 kalorij. S kakšno kombinacijo obeh vrst ‘prehrambenih dodatkov’ lahko to dosežemo najceneje?

Matrike

Kaj so matrike?

Matrike so (pravokotne) tabele števil.

Matrika velikosti 2×3 je pravokotna tabela $2 \cdot 3 = 6$ števil, razporejenih v 2 vrstici in 3 stolpce. Na primer

$$A = A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Matrika velikosti $m \times n$ je pravokotna tabela $m \cdot n$ števil, razporejenih v m vrstic in n stolpcev

$$A = A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrika z enim stolpcem je **stolpčni vektor**, matrika z eno samo vrstico je **vrstični vektor**. Rečemo tudi samo **stolpec** oziroma **vrstica**.

Računanje z matrikami

Množenje matrike s številom (skalarjem): Vsak element matrike pomnožimo s številom (skalarjem) (podobno kot pri vektorjih).

Seštevanje matrik: Seštevamo lahko le matrike **enakih** velikosti (podobno kot seštevanje vektorjev). Seštevamo 'istoležna števila'.

Primer

Če je mogoče, za matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \text{ in } C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

izračunajmo
$A + B$, $A + C$, $-B$, $B + (-B)$, $2 \cdot B$, $3 \cdot A + 2 \cdot B$, $3 \cdot A + 2 \cdot B - 4 \cdot C$.

Množenje matrik

- Matriki $A_{m\times n}$ in $B_{p\times q}$ lahko zmnožimo, če je $n = p$.
- $A_{m\times n} \cdot B_{n\times q} = C_{m\times q}$. Pri tem je c_{ij} je 'skalarni produkt' i-te vrstice A in j-tega stolpca B:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 1 \\ -9 & -7 & 3 \\ 9 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Primeri

Če je mogoče zmnožimo:

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Izračunajmo:

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Izračunajmo:

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ in $\begin{bmatrix} 9 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

Lastnosti matričnega množenja

- **Ne** velja nujno $A \cdot B = B \cdot A$ (primer 1. zgoraj).
- Iz $A \cdot B = 0$ **ne sledi** $A \neq 0$ ali $B \neq 0$ (primer 2. zgoraj).
- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ in $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
- **Enotska matrika** ali **identiteta**: Kvadratna matrika I_m velikosti $m \times m$, ki ima enice po diagonali, sicer pa same ničle.
  Za vsako matriko $A_{m\times n}$ velja $A_{m\times n} \cdot I_n = A_{m\times n}$ in $I_m \cdot A_{m\times n} = A_{m\times n}$ (primera 3. in 4. zgoraj).
- Za nekatere matrike A obstaja **inverzna matrika** A^{-1}, za katero velja $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$ (primer 5. zgoraj).

Matrike in (enolično rešljivi) sistemi enačb

Sistem enačb

$$\begin{aligned} x + \quad y + \quad 2z &= 1 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \\ 3x + 3y + 7z &= 1 \end{aligned}$$

smo po sistemu Gaussove eliminacije rešili

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \quad \text{in dobili rešitev oblike} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

V primeru enolično rešljivega sistema enačb za osnovno matriko sistema vedno obstaja inverzna matrika.
V našem primeru je matrika sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

in v primeru 5. zgoraj smo videli, da je njena inverzna matrika enaka

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrike in (nerešljivi) sistemi enačb

Sistem enačb

$$\begin{aligned} x \; +2y \; +2z &= 3 \\ 2y \; +2z &= 2 \\ 2x \; +y \; +z &= 4 \end{aligned}$$

smo po sistemu Gaussove eliminacije rešili

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \dots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

in dobili, da sistem nima rešitev. To pomeni, da matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ nima inverza.}$$

Matrike in sistemi enačb (z več rešitvami)

Sistem enačb

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ 3x - y + 3z - u &= 2 \\ x + y + z + u &= 2 \\ x + y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

smo po sistemu Gaussove eliminacije rešili

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \dots \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

in dobili neskončno rešitev v obliki četvorke $(t, 1+t, 1-t, -t)$. Ker sistem ni enolično rešljiv, to pomeni, da matrika

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ nima inverza.}$$

Matrike in (enolično rešljivi) sistemi enačb - ponovno

Ponovimo: Osnovna matrika sistema enačb z enolično rešitvijo ima inverz.

Inverz matrike in Gaussova eliminacija

Če obstaja inverz matrike, ga lahko izračunamo z Gaussovo eliminacijo

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \dots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Inverz matrike in Gaussova eliminacija - izračun

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \dots$$

Inverz matrike in Gaussova eliminacija - zaključek

Z Gaussovo eliminacijo smo dobili inverzno matriko. Matriki

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ in } \begin{bmatrix} -9 & 8 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

sta si namreč inverzni, oziroma

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -9 & 8 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 8 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrike in (enolično rešljivi) sistemi enačb - rešitev z inverzom

Sistem enačb

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \\ 3x + 3y + 7z &= 1 \end{aligned}$$

smo po sistemu Gaussove eliminacije rešili

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 7 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \text{ in dobili rešitev oblike } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Sistem enačb

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \\ 3x + 3y + 7z &= 1 \end{aligned} \quad \text{lahko zapišemo kot enačbo matrik} \quad A \cdot X = B$$

kjer je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ in } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Podobno kot pri številih dobimo

$$A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Sistem enačb

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \\ 3x + 3y + 7z &= 1 \end{aligned}$$

ob upoštevanju, da je inverz matrike sistema

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{enak} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

torej preprosto izračunamo

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 9 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 1 \\ 2x + 3y + 4z &= 0 \\ 3x + 3y + 7z &= 1 \end{aligned}$$

Vaja

Sistem enačb

$$\begin{array}{rrrrl} & +y & +z & -u & = 1 \\ x & -3y & -2z & +3u & = 0 \\ x & -y & -z & +u & = 1 \\ -x & +3y & +2z & -2u & = 2 \end{array} \quad \text{zapišemo z matrikami} \quad A \cdot X = B,$$

pri čemer je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ker je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{je} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Izračunali smo torej rešitev $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$ in $u = 2$.

$$\begin{array}{rrrrl} & +y & +z & -u & = 1 \\ x & -3y & -2z & +3u & = 0 \\ x & -y & -z & +u & = 1 \\ -x & +3y & +2z & -2u & = 2 \end{array}$$