Diskretne strukture

Prvi sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

8. oktober 2021

Vsebina predmeta

1. Matematična indukcija
2. Izjavni račun
3. Predikatni račun
4. Množice in funkcije
5. Relacije in preslikave
6. Grafi
7. Osnove teorije števil

Naravna števila in matematična indukcija

Naravna števila

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

V nekaterih tekstih $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ in $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Gre za stvar dogovora.

Princip matematične indukcije:

Gre za metodo dokazovanja trditev o naravnih številih.

1. Fiksirajmo neko naravno število n_0.
2. Želimo dokazati, da neka trditev $T(n)$, ki jo imenujemo indukcijska predpostavka in v kateri nastopa spremenljivka n, drži za vsa naravna števila n od n_0 naprej.
3. To naredimo v dveh korakih:
    1. *Baza indukcije*: Dokažemo, da je $T(n_0)$ pravilna.
    2. *Indukcijski korak*: Dokažemo, da za katerikoli $k \geq n_0$ iz veljavnosti trditve $T(k)$, sledi veljavnost trditve $T(k+1)$.

Matematična indukcija - primeri

Naloga: Dokaži, da za vsako naravno število n velja, da je vsota najmanjših n lihih naravnih števil enaka izrazu n^2.

Rešitev:

- *Indukcijska predpostavka:*
  $T(n) \ldots$ vsota najmanjših n lihih naravnih števil je enaka n^2.

- *Baza indukcije:*
  $T(0) \ldots$ vsota najmanjših 0 lihih naravnih števil je enaka 0^2.
  $\checkmark$

- *Indukcijski korak:*
  Če je vsota prvih k lihih naravnih števil enaka k^2, potem je vsota prvih $k+1$ lihih naravnih števil enaka $(k+1)^2$.

  Privzamemo torej veljavnost trditve $T(k)$, tj.

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-1) = k^2. \tag{1}$$

Preveriti moramo veljavnost trditve $T(k+1)$

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2. \qquad (2)$$

Upoštevamo (1) v (2) in dobimo

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2.$$

To dokaže pravilnost indukcijskega koraka in s tem veljavnost vseh trditev $T(n)$. $\square$

Naloga: Dokaži, da za vsoto prvih nekaj kubov naravnih števil velja zveza

$$0^3+1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Naloga: Zaporedje Fibonaccijevih števil $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots,$$

je definirano z začetnima členoma, $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, in rekurzivno zvezo

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{ ki velja za } n \geq 2. \tag{3}$$

Pokaži, da je Fibonaccijevo število f_{3n} vedno sodo.

Rešitev:

- *Indukcijska predpostavka:*
  $T(n) \dots$ število f_{3n} je sodo.

- *Baza indukcije:*
  $T(0) \dots$ število $f_{3\cdot 0} = f_0 = 0$ je sodo. ✓

- *Indukcijski korak:*
  Če je število f_{3k} sodo, potem je tudi število $f_{3(k+1)} = f_{3k+3}$ sodo.

Privzamemo torej veljavnost trditve $T(k)$, tj.

$$f_{3k} \text{ je sodo.} \tag{4}$$

Preveriti moramo veljavnost trditve $T(k+1)$, tj.

$$f_{3k+3} \text{ je sodo.} \tag{5}$$

Ideja: Izraz f_{3k+3} želimo preoblikovati na način, da se bo v izrazu pojavil f_{3k} in bomo lahko uporabili (4). Edina smiselna pot je uporaba rekurzivne zveze (3).

Računamo:

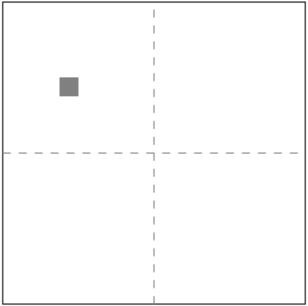
$$f_{3k+3} = f_{3k+2} + f_{3k+1}. \tag{6}$$

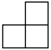
Ker se še ni pojavil f_{3k} v (6), nadaljujemo s preoblikovanjem s pomočjo (3):

$$f_{3k+3} = (f_{3k+1} + f_{3k}) + f_{3k+1} = \underbrace{2f_{3k+1}}_{\text{sodo}} + \underbrace{f_{3k}}_{\text{sodo}}. \tag{7}$$

Ker je vsota sodih števil sodo število, iz (7) res sledi, da je f_{3k+3} sodo število. $\square$

Naloga: Iz šahovnice velikosti $2^n \times 2^n$ izrežemo eno kvadratno polje.



Pokaži, da lahko takó preluknjano igralno ploščo tlakujemo s **trinominami** oblike .

Rešitev:

- *Indukcijska predpostavka:*
  $T(n)\ldots$ preluknjano $2^n \times 2^n$ šahovnico lahko pokrijemo s trinominami.

- *Baza indukcije:*
  $T(1)\ldots$ preluknjano 2×2 šahovnico lahko pokrijemo s trinominami. ✓

- *Indukcijski korak:*
  Če lahko pokrijemo s trinominami preluknjano $2^k \times 2^k$ šahovnico, potem lahko pokrijemo s trinominami tudi preluknjano $2^{k+1} \times 2^{k+1}$ šahovnico.

  Trinomino lahko postavimo tako, da imamo za pokriti še 4 preluknjane $2^k \times 2^k$ šahovnico. Te pa po predpostavki lahko pokrijemo. Torej lahko pokrijemo tudi začetno šahovnico. □

Izjave

Izjava je trditev, ki je bodisi *resnična* (ima vrednost 1) bodisi *neresnična* (ima vrednost 0). Ponavadi jih bomo označevali z velikimi tiskanimi črkami: $A, B, C, \dots, I_1, I_2, I_3, \dots$.

Primer

Trditve, za katere ne moremo preveriti njihove resničnosti, niso izjave:

1. Prižgi luč! *2. Ta stavek ni resničen.*

Nekaj osnovnih izjav:

1. Zunaj sije Sonce. *2. Peter se vozi s kolesom.*

Nekaj sestavljenih izjav:

1. Ni res, da zunaj sije Sonce.
2. Peter se vozi s kolesom in zunaj sije Sonce.
3. Peter se vozi s kolesom ali zunaj sije Sonce.
4. Če zunaj sije Sonce, potem se Peter vozi s kolesom.
5. Peter se vozi s kolesom, če in samo če zunaj sije Sonce.

Izjavni vezniki

Iz izjav gradimo nove izjave s pomočjo *izjavnih veznikov* (tudi *izjavnih povezav, logičnih veznikov*). Pomen izjavnih veznikov določimo s pomočjo *resničnostnih tabel*.

Nekaj osnovnih izjavnih veznikov:

- *enomestni*:
  - *negacija* izjave A, $\neg A$, beremo "*Ne A*".
  - $\neg A$ je resnična natanko tedaj, ko je A neresnična:

A	$\neg A$
0	1
1	0

- *dvomestni*: (definicije so na naslednji strani)
  - *konjunkcija* $\wedge$
  - *disjunkcija* $\vee$ in *ekskluzivna disjunkcija* $\veebar$
  - *implikacija* $\Rightarrow$
  - *ekvivalenca* $\Leftrightarrow$
- *večmestni*

Osnovni dvomestni vezniki

Naj bosta A in B izjavi. Tvorimo nove izjave $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \veebar B$, $A \Rightarrow B$ in $A \Leftrightarrow B$ na naslednji način:

- $A \wedge B$ beremo kot *"A in B"* in je resnična ntk tedaj, ko sta A in B resnični.
- $A \vee B$ beremo kot *"A ali B"* je resnična ntk tedaj, ko je vsaj ena od izjav A ali B resnična.
- $A \veebar B$ beremo kot *"Ali A ali B"* je resnična ntk tedaj, ko je natanko ena od izjav A ali B resnična.
- $A \Rightarrow B$ beremo kot *"Iz A sledi B"* oz. *"A implicira B"* oz. *"Če A potem B"* je neresnična ntk tedaj, ko je A resnična, B pa ne.
- $A \Leftrightarrow B$ beremo kot *"A natanko tedaj, ko B"* oz. *"A ekvivalentno B"* oz. *"A, če in samo če B"* je resnična ntk tedaj, ko je vsaj ena od izjav A ali B resnična.

Resničnostne tabele osnovnih dvomestnih veznikov

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \veebar B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$	$A \bigoplus B$
1	1	1	1	0	1	1	?
1	0	0	1	1	0	0	?
0	1	0	1	1	1	0	?
0	0	0	0	0	1	1	?

Na mestih ? v tabeli obstaja $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ možnih različnih izbir 0 in 1. Vsaka taka določa nek dvomestni izjavni veznik $\bigoplus$, tako da je teh natanko 16.