

1. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da za vse  $n \in \mathbb{N}$  velja:

(a)  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$ ,

(b)  $1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2}$ ,

(c)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n}$ ,

(d)  $1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n = (n - 1) \cdot 2^{n+1} + 2$ ,

(e)  $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$ .

2. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da je

$$n! < n^{n-1}$$

za vsako naravno število  $n \geq 3$ .

3. S pomočjo matematične indukcije dokaži:

(a) da je za vsako naravno število  $n$  izraz  $5^n + 2 \cdot 11^n$  deljiv s 3.

(b) da je produkt poljubnih treh zaporednih naravnih števil deljiv s 6.

(c) da ima vsaka triangulacija konveksnega  $n$ -kotnika (brez dodatnih oglišč) natanko  $n - 2$  trikotnikov.

4. Zaporedje Fibonaccijevih števil  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  je definirano z začetnima členoma,  $f_0 = 0$ ,  $f_1 = 1$ , in rekurzivno zvezo  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  za  $n \geq 2$ . S pomočjo matematične indukcije dokaži, da je za vsak  $n$  število  $f_{4n}$  deljivo s 3.

5. Na Otoku vitezov in oprod imajo otočani naslednji lastnosti: vitezi vedno govorijo resnico, oprode pa vedno lažejo. Poleg tega velja še, da so vsi moški iz iste družine istega tipa.

Nekega dne star vitez (a še vedno odličen logik) prosi svoja sinova Vita in Vida, naj prihodnji dan vprežeta svoja konja in odjahata do svojega strica na sosednjem posestvu. Zjutraj se sinova prideta opravičit očetu, da z njunim izletom ne bo nič, ker v staji ne najdeta svojih konj – nekdo ju je skril. Oče sumi prijatelja svojih sinov, norčava dvojčka Maka in Žaka, hkrati pa se zaveda, da Vitu in Vidu ideja o izletu sploh ni bila všeč. Odloči se, da bo oba sinova in njuna prijatelja poklical na zagovor.

**Mak** : Če je Žak skril enega konja, potem sem jaz drugega.

**Žak** : Vidovega konja je skril Vito.

**Vito Vidu** : Brat, nisem skril tvojega konja, prisežem.

**Mak** : Vidovega konja je skril nekdo izmed naju z Žakom.

Oče se ob tem nasmehne, ker mu postane kristalno jasno, kdo je komu ponagajal.

(a) Kdo je skril Vidovega konja?

(b) Kdo je skril Vitovega konja?