Diskretne strukture

Drugi sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

12. oktober 2021

Dogovor o prednostnem redu veznikov

Če ni z oklepaji drugače označeno, potem je prednostni red izjavnih veznikov naslednji:

1. *Negacija* veže močneje kot *konjunkcija*, *konjunkcija* veže močneje kot *(ekskluzivna) disjunkcija*, *(ekskluzivna) disjunkcija* vežeta močne kot implikacija in implikacija veže močneje kot **ekvivalenca**.

$\neg$	$\wedge$	$\vee$ $\veebar$	$\Rightarrow$	$\Leftrightarrow$

2. Disjunkcija in ekskluzivna disjunkcija sta enakovredni.
3. Enakovredni (dvomestni) vezniki vežejo od *leve proti desni*, tj.

$$A \otimes B \otimes C = ((A \otimes B) \otimes C).$$

Primer

Črke P, Q, R označujejo neke izjave. V skladu z zgornjim dogovorom velja:

$$\begin{aligned} \neg P \vee Q \wedge R &\sim (\neg P) \vee (Q \wedge R) \\ P \Rightarrow Q \wedge R \vee \neg S &\sim P \Rightarrow ((Q \wedge R) \vee (\neg S)) \\ P \Leftrightarrow Q \Rightarrow R \wedge \neg S &\sim P \Leftrightarrow (Q \Rightarrow (R \wedge (\neg S))) \end{aligned}$$

Izjavni izrazi - matematična formalizacija izjav

Izjavne izraze definiramo induktivno z naslednjimi pravili:

1. *Izjavni konstanti* 0 in 1, ki jima pravimo tudi *laž* in *resnica*, sta izjavna izraza.
2. *Izjavne spremenljivke* $p, q, r, \ldots$, ki imajo lahko vrednost 0 ali 1, so izjavni izrazi.
3. Če je A izjavni izraz, potem je tudi $(\neg A)$ izjavni izraz.
4. Če sta A in B izjavna izraza, potem so tudi

$$A \wedge B\ , \quad A \vee B\ , \quad A \Rightarrow B \quad \text{in} \quad A \Leftrightarrow B$$

izjavni izrazi.

Primer

Primeri izjavnih izrazi so

$$1 \Rightarrow p, \qquad q \wedge r, \qquad (1 \Rightarrow p) \Leftrightarrow (q \wedge r).$$

Resničnost izjavnih izrazov najlažje podamo s pomočjo *resničnostne tabele*. Gre za tabelo, v kateri za vsak nabor logičnih vrednosti izjavnih spremenljivk zapišemo logično vrednost izjavnega izraza.

Primer

Naloga. *Naj bodo p, q, r izjavne spremenljivke. Določimo resničnostno tabelo izraza*

$$p \wedge \neg q \Rightarrow r.$$

Rešitev.

- *Najprej z oklepaji nakažimo vrstni red računanja:*

$$p \wedge \neg q \Rightarrow r \quad \sim \quad ((p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r).$$

- *V tabeli vsaki spremenljivki p, q, r, vsakemu vmesnemu izrazu $\neg q$, $p \wedge (\neg q)$ in končnemu izrazu $((p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r)$ pripada po en stolpec.*

Primer

- *V resničnostni tabeli imamo* $2^{\text{število spremenljivk}}$ *vrstic, pri čemer vsaka predstavlja eno od možnih kombinacij 0 in 1.*

- *Postopoma računamo vrednosti izrazov v tabeli od leve proti desni.*

p	q	r	$\neg q$	$p \wedge (\neg q)$	$(p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r$
1	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	0	1

- *Na koncu nas zanimajo samo vrednosti v zadnjem stolpcu tabele. Vsi stolpci med stolpci s spremenljivkami in zadnjim stolpcem so zgolj pomožni.*

Enakovredni izjavni izrazi

- Izjavni izraz, ki ima v vseh vrsticah resničnostne tabele vrednost 1, imenujemo *tavtologija*.
- Izjavni izraz, ki ima v vseh vrsticah resničnostne tabele vrednost 0, imenujemo *protislovje*.
- Vse ostale izjavne izraze imenujmo *nevtralni izjavni izrazi*.

Dva izjavna izraza I in J sta *enakovredna*, če se ujemata v zadnjem stolpcu resničnostne table. To zapišemo na kratko kot $I \sim J$.

Bolj matematično to povemo kot:

Dva izjavna izraza I in J sta *enakovredna*, če se njuni vrednosti pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk ujemata.

Nekaj očitnih dejstev o enakovrednosti

Naj bodo I, J, K izjavni izrazi. Veljajo naslednje trditve:

- Izjavna izraza I in J sta enakovredna natanko tedaj, ko je izraz $I \Leftrightarrow J$ tavtologija.
- $I \sim I$.
- Če je $I \sim J$, potem je $J \sim I$.
- Če je $I \sim J$ in $J \sim K$, potem je $I \sim K$.

Zgornje lastnosti so zelo uporabne, več o tem bomo videli v poglavju *Relacije*.

Zakoni izjavnega računa

Nekateri pari enakovrednih izjavnih izrazov imajo posebna imena. To so *zakoni izjavnega računa*.

Opomba. Spodnjih zakonov se ne učimo na pamet. Tiste, ki so v okvirčkih, si je sicer smiselno zapomniti, saj jih bomo veliko uporabljali in niso samoumevni. Ostale pa samo preberemo in se zavedamo njihovega obstoja.

Absorpcija

$$\boxed{A \lor (A \land B) \sim A}$$
$$\boxed{A \land (A \lor B) \sim A}$$

de Morganova zakona

$$\boxed{\neg(A \land B) \sim \neg A \lor \neg B}$$
$$\boxed{\neg(A \lor B) \sim \neg A \land \neg B}$$

Distributivnost

$$\boxed{A \land (B \lor C) \sim (A \land B) \lor (A \land C)}$$
$$\boxed{A \lor (B \land C) \sim (A \lor B) \land (A \lor C)}$$

Zakoni izjavnega računa

Dvojna negacija	$\neg\neg A \sim A$
Idempotenca	$A \wedge A \sim A$ $A \vee A \sim A$
Komutativnost	$A \wedge B \sim B \wedge A$ $A \vee B \sim B \vee A$ $A \Leftrightarrow B \sim B \Leftrightarrow A$
Asociativnost	$(A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C)$ $(A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$ $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \sim A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$
Kontrapozicija	$A \Rightarrow B \sim \neg B \Rightarrow \neg A$
Tavtologija in protislovje	$A \Rightarrow A \sim 1$ $A \vee \neg A \sim 1$ $A \Leftrightarrow A \sim 1$ $A \wedge \neg A \sim 0$
Lastnosti ekvivalence	$A \Leftrightarrow B \sim (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ $A \Leftrightarrow B \sim (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ $\neg(A \Leftrightarrow B) \sim \neg A \Leftrightarrow B$

Preverimo veljavnost nekaterih zakonov

Za preverbo zakona izjavnega računa moramo pokazati, da imata izraza na obeh straneh $\sim$ iste logične vrednosti v vseh vrsticah resničnostne tabele:

- $A \vee (A \wedge B) \sim A$

A	B	$A \wedge B$	$A \vee (A \wedge B)$	A
1	1	1	*1*	*1*
1	0	0	*1*	*1*
0	1	0	*0*	*0*
0	0	0	*0*	*0*

- $\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
1	1	1	*0*	0	0	*0*
1	0	0	*1*	0	1	*1*
0	1	0	*1*	1	0	*1*
0	0	0	*1*	1	1	*1*

- $A \wedge (B \vee C) \sim (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
1	1	1	1	*1*	1	1	*1*
1	1	0	1	*1*	1	0	*1*
1	0	1	1	*1*	0	1	*1*
1	0	0	0	*0*	0	0	*0*
0	1	1	1	*0*	0	0	*0*
0	1	0	1	*0*	0	0	*0*
0	0	1	1	*0*	0	0	*0*
0	0	0	0	*0*	0	0	*0*

Kako najti izraz s predpisano resničnostno tabelo?

Naloga. Poišči izjavni izraz A s predpisano resničnostno tabelo:

p	q	r	A
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

Ideja:

- Tvorimo izjavni izraz, ki bo imel vrednost 1 natanko v izbrani vrstici tabele, povsod drugod 0.
- Z disjunkcijami povežemo vse izjavne izraze, ki pripadajo vrsticam z vrednostjo 1.

Disjunktivna normalna oblika

Osnovna konjunkcija je konjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij:

$$p \wedge (\neg q) \wedge r \wedge \ldots \wedge t.$$

Izvedba ideje s prejšnje strani:

- Za vsako vrstico resničnostne tabele, v kateri ima A vrednost 1, pripravimo osnovno konjunkcijo.
- V osnovni konjunkciji zapišemo spremenljivke z vrednostjo 1 in zanikamo tiste z vrednostjo 0.
- Z disjunkcijami povežemo zgornje osnovne konjunkcije.

Disjunktivna normalna oblika (DNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{DNO}, za katerega velja:

- $A \sim A_{DNO}$.
- A_{DNO} je disjunkcija osnovnih konjunkcij.

DNO izraza izpred dveh strani

DNO izraza A izpred dveh strani:

- A ima vrednost 1 v prvi, tretji, četrti, peti in sedmi vrstici.
- Osnovne konjunkcije so

$$\begin{aligned}
&p \wedge q \wedge r,\\
&p \wedge (\neg q) \wedge r,\\
&p \wedge (\neg q) \wedge (\neg r),\\
&(\neg p) \wedge q \wedge r,\\
&(\neg p) \wedge (\neg q) \wedge r.
\end{aligned}$$

- A_{DNO} povezuje osnovne konjunkcije:

$$\begin{aligned}
(p \wedge q \wedge r) \ \vee \ (p \wedge (\neg q) \wedge r) \ \vee \ (p \wedge (\neg q) \wedge (\neg r))\\
\vee \ ((\neg p) \wedge q \wedge r) \ \vee \ ((\neg p) \wedge (\neg q) \wedge r).
\end{aligned}$$

Konjunktivna normalna oblika - druga možnost

Ideja:

- Tvorimo izjavni izraz, ki bo imel vrednost 0 natanko v izbrani vrstici tabele, povsod drugod 1.
- S konjunkcijami povežemo vse izjavne izraze, ki pripadajo vrsticam z vrednostjo 0.

Osnovna disjunkcija je disjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij:

$$p \vee (\neg q) \vee r \vee \ldots \vee t.$$

Izvedba ideje:

- Za vsako vrstico resničnostne tabele, v kateri ima A vrednost 0, pripravimo osnovno disjunkcijo.
- V osnovni disjunkciji zapišemo spremenljivke z vrednostjo 0 in zanikamo tiste z vrednostjo 1.
- S konjunkcijami povežemo zgornje osnovne disjunkcije.

Konjunktivna normalna oblika (KNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{KNO}, za katerega velja:

- $A \sim A_{KNO}$
- A_{KNO} je konjunkcija osnovnih disjunkcij.

KNO izraza A izpred dveh strani:

$$A_{KNO} = ((\neg p) \vee (\neg q) \vee r) \ \wedge \ (p \vee (\neg q) \vee r) \ \wedge \ (p \vee q \vee r).$$