Tutorstvo - fizika, FRI

3. teden: kinematika

1. Gibanje v 1D

Hitrost delca je podana kot funkcija časa: $v(t) = kt + v_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, kjer je $k = 1.5$ m/s^2, $v_0 = 8$ m/s in $\tau = 4$ s. Določi premik, pospešek in povprečno hitrost delca po 5 sekundah. Ob katerem času doseže hitrost minimum? Začetni pogoj: $x(t = 0) = 0$

Rešitev:

Hitrost in pospešek sta definirana kot prvi in drugi odvod lege po času.

$$v = \frac{dx}{dt},\ a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

Za rešitev te naloge bomo potrebovali znanje odvajanja in integriranja. Nekaj pravil, ki nam bodo prišla prav:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}\,;\ n \in \mathbb{R} \qquad \int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C\,;\ n, C \in \mathbb{R},\ n \neq -1$$

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}\,;\ a \in \mathbb{R} \qquad \int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a} + C\,;\ a, C \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

$$\frac{d}{dx}(\alpha f(x) \pm \beta g(x)) = \alpha\frac{d}{dx}f(x) \pm \beta\frac{d}{dx}g(x)\,;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\int (\alpha f(x) \pm \beta g(x))\,dx = \alpha\int f(x)\,dx \pm \beta\int g(x)\,dx\,;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Če želimo izračunati pospešek oz. pot, bomo morali hitrost odvajati oz. integrirati po času.

$$a = \frac{dv}{dt} = k - \frac{v_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.927\ \text{m/s}^2$$

$$v = \frac{dx}{dt} \to dx = vdt \to \int_0^x dx = \int_0^t vdt \to x = \frac{kt^2}{2} - v_0\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + v_0\tau = 41.6\ \text{m}$$

Povprečna hitrost je definirana kot razmerje med celotnim premikom in časom, v katerem se premik zgodi:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(5s) - x(0)}{(5-0)s} = 8.32\ \text{m/s}$$

Vemo, da je odvod funkcije v točkah, kjer ta zavzame ekstremno vrednost, enak 0. To lahko uporabimo pri iskanju minimuma hitrosti. Njen odvod (pospešek) moramo torej postaviti na 0.

$$\frac{dv}{dt} = a = k - \frac{v_0}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = 0 \to e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{k\tau}{v_0} \to t = \tau\ln\frac{v_0}{k\tau} = 1.15\ \text{s}$$

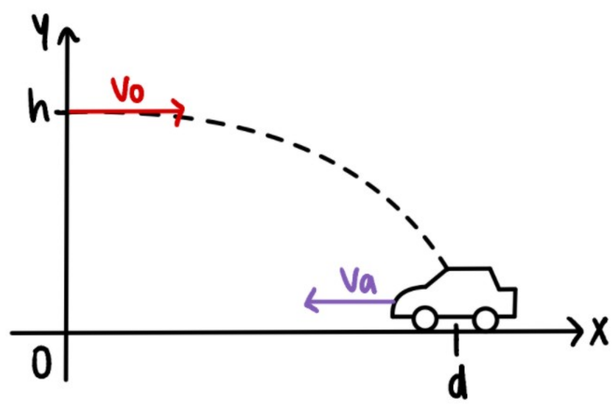
Če se želimo prepričati, da je ekstrem, ki smo ga poiskali, res minimum, pogledamo predznak drugega odvoda hitrosti po času. Če bo ta pozitiven, smo res v minimumu, če bo pa negativen pa v maksimumu.

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{da}{dt} = \frac{v_0}{\tau^2}e^{-\frac{t}{\tau}},$$

kar je več od 0 za vsak $t \in \mathbb{R}$.

2. Vodoravni met

Z balkona, ki se nahaja na višini $h = 20$ metrov, bi radi zadeli avto, ki nam prihaja nasproti s hitrostjo $v_a = 50$ km/h. Kamen vržemo s hitrostjo $v_0 = 10$ m/s v horizontalni smeri. Kolikšna naj bo horizontalna razdalja d med avtom in balkonom v trenutku, ko vržemo kamen, da bomo avtomobil zadeli? S kolikšno hitrostjo kamen zadene avto?



Rešitev:

Postavimo koordinatni osi x in y tako, da bo začetna lega našega kamna $(x_k, y_k) = (0, h)$, lega avtomobila pa $(x_a, y_a) = (d, 0)$ - glej skico. Poglejmo, kako se lega avtomobila spreminja s časom. Hitrost avtomobila ima samo komponento v horizontalni smeri, tako da lahko lego avtomobila v odvisnosti od časa opišemo kot enakomerno gibanje v smeri $-x$ (ker se avto giblje proti kamnu).

$$(x_a(t), y_a(t)) = (d - v_a t, 0)$$

Hitrost kamna pa ima komponenti tako v smeri x kot v smeri y. Hitrost v smeri x je ves čas enaka v_0, saj ni pospeška v horizontalni smeri:

$$x_k(t) = v_0 t$$

Vertikalna komponenta hitrosti se pa zaradi gravitacijskega pospeška (ki kaže v smeri $-y$) spreminja:

$$v_{y,k} = \frac{dy_k}{dt} = -gt$$

Z integriranjem po času dobimo

$$\int_h^{y_k} dy_k = -g\int_0^t tdt \to y_k - h = -\frac{gt^2}{2} \to y_k(t) = h - \frac{gt^2}{2}$$

Če naj kamen zadene avtomobil, mora ob nekem času t veljati

$$(x_k(t), y_k(t)) = (x_a(t), y_a(t))$$

Vstavimo izraze za lege kamna in avtomobila in dobimo:

$$(v_0 t, h - \frac{gt^2}{2}) = (d - v_a t, 0)$$

Izenačimo komponenti x in y in dobimo sistem 2 enačb z neznankama d in t:

$$v_0 t = d - v_a t \tag{1}$$

$$h - \frac{gt^2}{2} = 0 \tag{2}$$

Iz enačbe (2) izrazimo t in ga vstavimo v enačbo 1. Dobimo izraz za d:

$$d = (v_0 + v_a)\sqrt{\frac{2h}{g}} = 48.3 \text{ m}$$

Ker ima hitrost kamna dve komponenti, dobimo velikost s pomočjo Pitagorovega izreka

$$v^2 = v_{x,k}^2 + v_{y,k}^2,$$

pri čemer je $v_{y,k} = -\sqrt{2gh}$. Do tega izraza lahko pridemo, če iz enačbe (2) izrazimo t in ga vstavimo v $v_{y,k} = -gt$. Hitrost kamna ob trku torej znaša:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 22.2 \text{ m/s}$$

3. Vrtiljak

Vrtiljak, ki se na začetku vrti s kotno hitrostjo $\omega_0 = 6 \text{ s}^{-1}$, se začne vrteti enakomerno pojemajoče, tako da se ustavi po 10 obratih. Kolikšen je kotni pospešek (pojemek) vrtiljaka? Koliko časa potrebuje za 5. obrat?

Rešitev:

Med zasukom, kotno hitrost in kotnim pospeškom veljajo zveze, ki so analogne tistim za x, v in a:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}, \, \omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

Če želimo kotni pospešek povezati s φ in ω, bomo morali integral po času prevesti na integral po φ. To storimo s pomočjo naslednjega trika:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi}$$

V zgornji vrstici smo izraz za pospešek pomnožili z $\frac{d\varphi}{d\varphi}$ (s čimer ga nismo spremenili) in upoštevali, da je $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$. Integriramo zgornjo zvezo in dobimo:

$$\int_0^{\varphi} \alpha d\varphi = \int_{\omega_0}^{\omega} \omega d\omega \to \alpha\varphi = \frac{1}{2}(\omega^2 - \omega_0^2)$$

Ker se vrtiljak po desetih obratih ustavi, je ω na koncu enaka 0. Izraz za kotni pospešek se potemtakem glasi

$$\alpha = -\frac{\omega_0^2}{2\varphi} = -0.286 \text{ s}^{-2}$$

Izračunati moramo še čas, ki ga vrtiljak porabi za 5. obrat. Tega bomo dobili kot razliko med časoma, ki ju vrtiljak porabi, da naredi 5 in 4 obrate. Z dvakratno integracijo pospeška po času dobimo enačbo, ki jo poznamo že iz srednje šole:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

Enačba za čas je kvadratna, ki jo znamo rešiti. Smiselne so le tiste rešitve, kjer sta $t_4, t_5 < t_{10}$, zato izberemo v obrazcu za kvadratno enačbo pred korenom predznak +. Upoštevamo, da je $\varphi_5 = 10\pi$ in $\varphi_4 = 8\pi$ in dobimo izraz za čas:

$$t = t_5 - t_4 = \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha\varphi_5} - \sqrt{\omega_0^2 + 2\alpha\varphi_4}}{\alpha} = 1.41 \text{ s}$$

Dodatek - čoln

Čoln se giblje s hitrostjo $v_0 = 5.0$ m/s, ko ugasne motorje. Začne se ustavljati, pri čemer je pospešek (pojemek) med ustavljanjem enak $a = -kv^2$. Kolikšna je njegova hitrost po 1.2 s, če je konstanta $k = 7.8/\text{m}$?

Rešitev:

Izhajamo iz enačbe $a = dv/dt$. Ločimo spremenljivke in nato integriramo.

$$dv = adt \to dv = -kv^2 dt \to \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v^2} = \int_0^t -kdt \to -\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = -kt$$

$$v = \frac{1}{kt + \frac{1}{v_0}} = 0.105 \text{ m/s}$$