Diskretne strukture

Tretji sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

22. oktober 2021

Polni nabori izjavnih veznikov

Družina izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ je *poln nabor izjavnih veznikov*, če za vsak izjavni izraz A obstaja *enakovreden izjavni izraz B*, ki vsebuje samo *veznike iz $\mathcal{N}$*.

Vprašanje. Kako v praksi pokazati, da je nabor izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ poln?

1. Izberemo znan poln nabor izjavnih veznikov $\mathcal{Z}$.
2. Vsak veznik iz znanega nabora $\mathcal{Z}$ izrazimo samo z uporabo veznikov iz $\mathcal{N}$.

Trditev

Nabor $\{\neg, \wedge, \vee\}$ je poln nabor izjavnih veznikov.

Dokaz.

Naj bo A nek izjavni izraz in $\mathcal{R}_A$ njegova resničnostna tabela. Iz razdelka o KNO in DNO vemo, da obstaja izjavni izraz B, v katerem nastopajo samo vezniki $\neg, \wedge, \vee$, in ima resničnostno tabelo enako $\mathcal{R}_A$. To pa je ravno tisto, kar smo morali dokazati. $\square$

Trditev

Nabori

$$\mathcal{N}_1 = \{\neg, \vee\}, \quad \mathcal{N}_2 = \{\neg, \wedge\}, \quad \mathcal{N}_3 = \{\neg, \Rightarrow\}, \quad \mathcal{N}_4 = \{0, \Rightarrow\}$$

so vsi polni nabori izjavnih veznikov.

Dokaz.

Pišimo $\mathcal{Z} = \{\neg, \wedge, \vee\}$.

- $\mathcal{N}_1$:
  Vemo, da je $\mathcal{Z}$ poln nabor. Veznika $\neg$ in $\vee$ sta vsebovana v $\mathcal{N}_1$. Dokazati moramo še, da se da $\wedge$ izraziti s pomočjo $\neg$ in $\vee$. Velja

  $$p \wedge q \;\sim\; \neg\neg(p \wedge q) \;\sim\; \neg(\neg p \vee \neg q),$$

  kjer smo v drugi enakosti uporabili de Morganov zakon. Torej je $\mathcal{N}_1$ poln.

- $\mathcal{N}_2$: Za vajo.

Dokaz.

- $\mathcal{N}_3$:
  Vemo, da je $\mathcal{N}_1$ poln nabor. Veznik $\neg$ je vsebovan v $\mathcal{N}_3$. Dokazati moramo še, da se da $\vee$ izraziti s pomočjo $\neg$ in $\Rightarrow$. Velja

  $$p \vee q \ \sim \ \neg(\neg p) \vee q \ \sim \ \neg p \Rightarrow q.$$

  Torej je $\mathcal{N}_3$ poln.

- $\mathcal{N}_4$:
  Vemo, da je $\mathcal{N}_3$ poln nabor. Veznik $\Rightarrow$ je vsebovan v $\mathcal{N}_4$. Dokazati moramo še, da se da $\neg$ izraziti s pomočjo 0 in $\Rightarrow$. Velja

  $$\neg p \ \sim \ \neg p \vee 0 \ \sim \ p \Rightarrow 0.$$

  Torej je $\mathcal{N}_4$ poln.

$\square$

Nepolni nabori izjavnih veznikov

Vprašanje. Kako v praksi pokazati, da nabor izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ ni poln?

To vprašanje je sicer popolnoma razrešeno, vendar presega zahtevnost tega predmeta. Lahko pa vsaj za nekatere nabore preverimo, da niso polni tako, da poiščemo neko *lastnost, ki jo ohranjajo*, pa je ne bi smeli.

Trditev

Nabora $\{\wedge, \vee\}$ *in* $\{\Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ *nista polna.*

Dokaz.

- $\{\wedge, \vee\}$ ni poln:
  Oba veznika $\wedge$ in $\vee$ ohranjata '1', tj. $1 \wedge 1 \sim 1$ in $1 \vee 1 \sim 1$. To pa že pomeni, da ne moreta biti polna, saj bo vrednost izraza, v katerega bomo vstavili za vse spremenljivke vrednost 1, enaka 1.

- $\{\Rightarrow, \Leftrightarrow\}$ ni poln:
  Isti argument kot za zgornji nabor.

□

Sklepanje v izjavnem računu

Kateri sklepi so pravilni?

1.

Predpostavki:	1.	*Če dežuje, je oblačno.*
	2.	*Dežuje.*
Zaključek:	3.	*Oblačno je.*

2.

Predpostavke:	1.	*Ta žival ima krila ali pa ni ptič.*
	2.	*Če je ta žival ptič, potem leže jajca.*
	3.	*Ta žival nima kril.*
Zaključek:	4.	*Torej ta žival ne leže jajc.*

3.

Predpostavke:	1.	*Io je Jupitrov satelit.*
	2.	*Titan je Saturnov satelit.*
Zaključek:	3.	*Zemlja je tretji planet od Sonca.*

Formalizacija

1.

Dežuje.	...	d	1.	$d \Rightarrow o$
Oblačno je.	...	o	2.	d
			3.	o

2.

Ta žival ima krila.	...	k	1.	$k \vee \neg p$
Ta žival je ptič.	...	p	2.	$p \Rightarrow j$
Ta žival leže jajca.	...	j	3.	$\neg k$
			4.	$\neg j$

3.

Io je Jupitrov satelit.	...	1	1.	1
Titan je Saturnov satelit.	...	1	2.	1
Zemlja je tretji planet od Sonca.	...	1	3.	1

Definicija pravilnega sklepa

Zaporedje izjavnih izrazov $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ je *pravilen sklep* s *predpostavkami* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in *zaključkom* B, če je *zaključek* B *resničen* pri vseh tistih naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerih so *resnične vse predpostavke*.

Pišemo:

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B.$$

Beremo:

Iz predpostavk $A_1, A_2, \ldots, A_n$ logično sledi zaključek B.

Poglejmo si primere iz prejšnje strani:

d	o	$d \Rightarrow o$	o	
1	*1*	*1*	*1*	✓
1	0	0	0	
0	1	1	1	
0	0	1	0	

  Sklep je pravilen.

k	p	j	$k \vee \neg p$	$p \Rightarrow j$	$\neg k$	$\neg j$	
1	1	1	1	1	0	0	
1	1	0	1	0	0	1	
1	0	1	1	1	0	0	
1	0	0	1	1	0	1	
0	1	1	0	1	1	0	
0	1	0	0	0	1	1	
0	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	✗
0	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	✓

Sklep ni pravilen. Protiprimer dobimo v primerku $k \sim 0$, $p \sim 0$ in $j \sim 1$.

Protiprimer je žival, ki

- nima kril,
- ni ptič in
- leže jajca.

- Sklep $1, 1 \models 1$ je pravilen.

Še en zgled

Predpostavke:	1.	*Šel bom na tekmo, zvečer pa bom naredil domačo nalogo.*
	2.	*Če grem na tekmo in nato še v kino, zvečer ne bom mogel narediti domače naloge.*
Zaključek:	3.	*Ne morem iti v kino.*

Formalizacija:

Grem na tekmo.	...	t
Grem v kino.	...	k
Naredim domačo nalogo.	...	d

1. $t \wedge d$
2. $t \wedge k \Rightarrow \neg d$

---

3. $\neg k$

t	d	k	$t \wedge d$	$t \wedge k \Rightarrow \neg d$	$\neg k$
1	1	1	1	0	0
1	*1*	*0*	*1*	*1*	*1* ✓
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	1	1

Pravila sklepanja oz. osnovni pravilni sklepi

$A, A \Rightarrow B \models B$	*modus ponens (MP)*
$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$	*modus tollens (MT)*
$A \vee B, \neg B \models A$	*disjunktivni silogizem (DS)*
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$	*hipotetični silogizem (HS)*
$A, B \models A \wedge B$	*združitev (Zd)*
$A \wedge B \models A$	*poenostavitev (Po)*
$A \models A \vee B$	*pridružitev (Pr)*

Primer

Dokažimo pravilnost modus ponensa in modus tollensa.

Dokaz.

MP :

A	B	$A \Rightarrow B$	B	
1	1	1	1	✓
1	0	0	0	
0	1	1	1	
0	0	1	0	

MT :

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	
1	1	1	0	0	
1	0	0	1	0	
0	1	1	0	1	
0	0	1	1	1	✓

Postopek dokazovanja pravilnosti sklepa

Pravilnost sklepa

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$$

pokažemo tako, da sestavimo zaporedje izjavnih izrazov

$$C_1, C_2, \ldots, C_m,$$

kjer je

$$C_m = B$$

in za $i = 1, 2, \ldots, m$ velja:

(a) C_i je ena od *predpostavk* ali

(b) C_i je *tavtologija* ali

(c) C_i je *enakovreden* enemu od predhodnih izrazov v zaporedju ali

(d) C_i *logično sledi* iz predhodnih izrazov po enem od osnovnih pravilnih sklepov.

Zgled

Ali iz predpostavk $p \Rightarrow q, p \vee r, q \Rightarrow s, r \Rightarrow t, \neg s$ sledi t?

1.	$p \Rightarrow q$	predpostavka
2.	$p \vee r$	predpostavka
3.	$q \Rightarrow s$	predpostavka
4.	$r \Rightarrow t$	predpostavka
5.	$\neg s$	predpostavka
6.	$p \Rightarrow s$	HS(1,3)
7.	$\neg p$	MT(6,5)
8.	r	DS(2,7)
9.	t	MP(4,8)