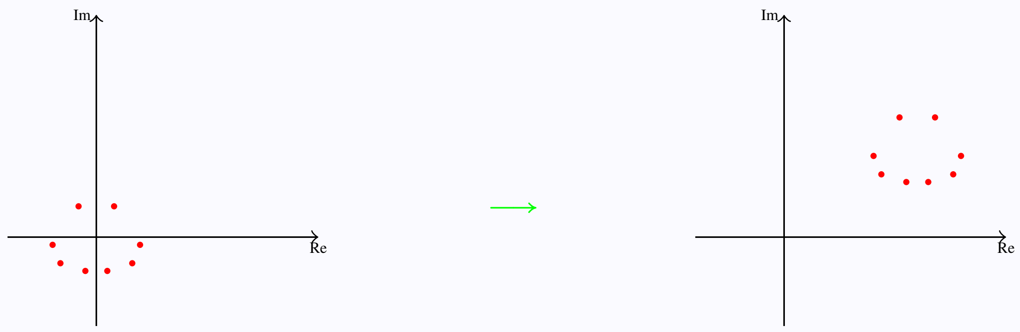
Primeri

Opišimo in narišimo množico kompleksnih števil $z \in \mathbb{C}$, za katere velja

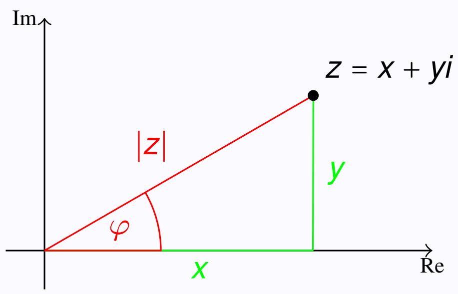
- $2\bar{z} - z^2 = 0$
- $|z - 3 + 2i| = 4$
- $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z^2 = 2$
- $|z + i| < |z - 1|$
- $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$
- $|z - 1| + |z + 1| = 4$

Geometrijski primer



$$z \mapsto z + (3 + 2i)$$

Polarni zapis kompleksnega števila



$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

$$x = |z| \cos \varphi \quad \text{in} \quad y = |z| \sin \varphi$$

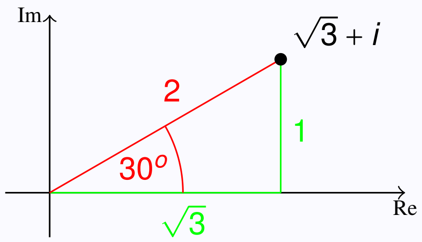
$$z = x + iy = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| \cdot e^{i \cdot \varphi}$$

Kompleksno število $z = x + iy$ zapišemo v polarnem zapisu kot

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

$\varphi = \operatorname{Arg}(z)$ imenujemo polarni kot ali argument. Argument je določen samo do mnogokratnika celega kota $2\pi^{rd} = 360^o$ natanko.

Primer



$2 = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2}$ in $30^o = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{3} = 2\cos 30^o$ in $1 = 2\sin 30^o$

$\sqrt{3} + i = 2\cdot(\cos 30^o + i \sin 30^o) = 2\cdot e^{i\cdot 30^o}$

Zakaj polarni zapis?

- Izračunamo produkt $(x+yi)\cdot(u+vi) = xu - yv + (yu + xv)i$.
- Izračunamo produkt

$$\begin{aligned} & [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]\cdot[q(\cos\psi + i\sin\psi)] = \\ = \; & r\cdot q(\cos\varphi\cdot\cos\psi - \sin\varphi\cdot\sin\psi) + (\cos\varphi\cdot\sin\psi + \sin\varphi\cdot\cos\psi)i = \\ = \; & r\cdot q[\cos(\varphi+\psi) + \sin(\varphi+\psi)i] \end{aligned}$$

Torej

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot q(\cos\psi + i\sin\psi) =$$

$$= \underbrace{r\cdot q}_{\text{produkt absolutnih vrednosti}} \left(\cos\underbrace{(\varphi+\psi)}_{\text{vsota kotov}} + i\sin\underbrace{(\varphi+\psi)}_{\text{vsota kotov}}\right)$$

- Dinamična ilustracija: https://www.geogebra.org/m/vthctagb v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

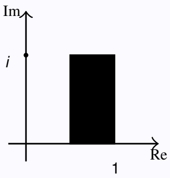
Računanje v polarni obliki

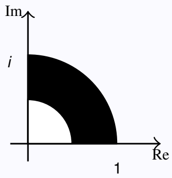
- Eulerjev zapis: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
- Polarni zapis se poenostavi: $z = |z|e^{i\varphi}$.
- Števila $z = e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}$ so na enotski krožnici $|z| = 1$.
- Množenje se poenostavi: $z_1 z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
  - Množenje: absolutni vrednosti se zmnožita, argumenta se seštejeta.
  - Potenciranje: $z = |z|e^{i\varphi} \longrightarrow z^n = |z|^n e^{i\varphi n}$ (de Moivrova formula)
  - Korenjenje: $z = |z|e^{i\varphi} \longrightarrow z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi}{n}}$ (de Moivrova formula)
- Velja:
  - $\bar{z} = |z|e^{-i\varphi}$,
  - $z^{-1} = \frac{1}{|z|}e^{-i\varphi}$
  - $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
- Dinamična ilustracija: https://www.geogebra.org/m/nmymchxk v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs

Primeri

- Zapišimo v polarni obliki števila $1, -1, i, -i, 1+i, -1-i$.

- Zapišimo množici:



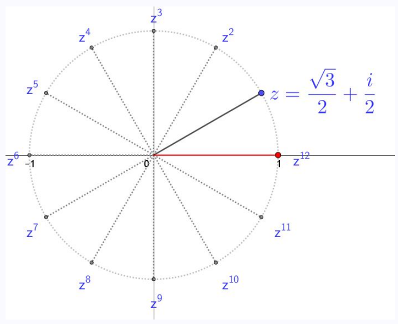


$\{x + iy; 0.5 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ $\quad$ $\{re^{i\varphi}; 0.5 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}\}$

Primeri

- Izračunajmo $(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{12}$

  $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1 \cdot (\cos\frac{\pi}{6} + i\sin(\frac{\pi}{6}))$



  in zato $z^{12} = 1^{12} \cdot (\cos\frac{12\pi}{6} + i\sin(\frac{12\pi}{6})) = 1 \cdot (\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 1$.
- Za $z = 1 - i\sqrt{3}$ narišimo in določimo števila z, z^2, z^3, z^4, z^5.

Koreni kompleksnega števila

n-ti koreni števila $a \in \mathbb{C}$ so rešitve enačbe $z^n = a$.

- Enačbo zapišemo v polarni obliki: $a = |a| \cdot e^{i\varphi}$.
- Dobimo n različnih rešitev

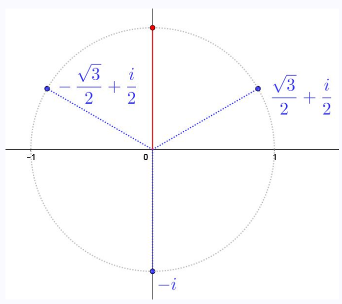
$$z_k = \sqrt[n]{|a|}\, e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots n - 1$$

- Rešitve ležijo na ogliščih pravilnega n-kotnika v kompleksni ravnini.

Primer 1

Katera števila ustrezajo enačbi $z^3 = i$?

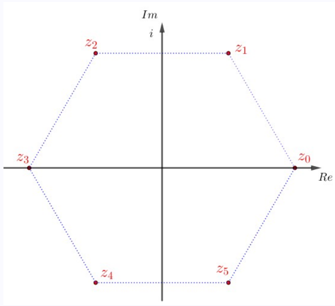
- Velja $i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{2})$
- Velja tudi
  $i = \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- Zato
  $z = i^{\frac{1}{3}} = \cos(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}), k \in \mathbb{Z}$.
- Izračunamo rešitve
  - $k = 0 : z_0 = \cos(\frac{\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$
  - $k = 1 : z_1 = \cos(\frac{5\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$
  - $k = 2 : z_2 = \cos(\frac{3\pi}{2}) + i \cdot \sin(\frac{3\pi}{2}) = -i$



Primer 2

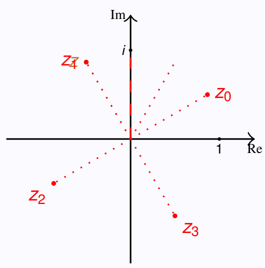
Katera števila $z \in \mathbb{C}$ ustrezajo enačbi $z^6 = 1$.

- Velja $1 = \cos(0) + i \cdot \sin(0)$
- Velja tudi $1 = \cos(2k\pi) + i \cdot \sin(2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- Zato $z = 1^{\frac{1}{6}} = \cos(\frac{2k\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{2k\pi}{6}), k \in \mathbb{Z}$.
- Izračunamo rešitve
  - $k = 0 : z_0 = \cos(0) + i \cdot \sin(0) = 1$
  - $k = 1 : z_1 = \cos(\frac{\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - $k = 2 : z_2 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - $k = 3 : z_3 = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1$
  - $k = 4 : z_4 = \cos(\frac{4\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
  - $k = 5 : z_5 = \cos(\frac{5\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$



Primer 3

- Poiščimo in narišimo vse $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $2z^4 + 1 = \sqrt{3}i$.
  - Zapišemo
    $z^4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$
  - Zato $z = 1^{\frac{1}{4}} = \cos\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}$.
  - Izračunamo rešitve
    - $k = 0 : z_0 = \cos(\frac{\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$
    - $k = 1 : z_1 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
    - $k = 2 : z_2 = \cos(\frac{7\pi}{6}) + i \cdot \sin(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$
    - $k = 3 : z_3 = \cos(\frac{5\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{5\pi}{3}) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

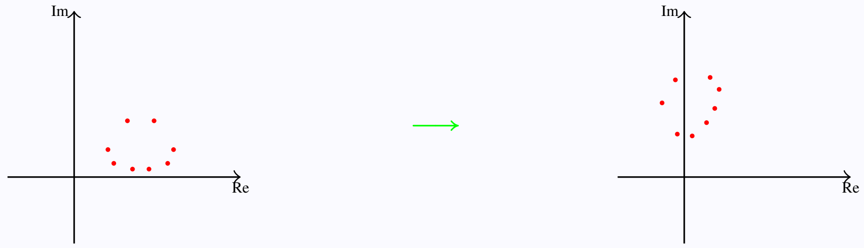


- Dinamična ilustracija: https://www.geogebra.org/m/kcqjnmv7 v https://www.geogebra.org/m/acrjsvvs
- Polarna oblika je še posebej koristna pri množenju, potenciranju in korenjenju.

Primeri

- Poiščimo in narišimo vse $z \in \mathbb{C}$, za katere velja $(z^3 - 2)(z^4 + i) = 0$.
- Poiščimo z^{2016} za $z = \frac{1-i}{i}$.

- Vizualizirajmo $z \longrightarrow ze^{i\frac{\pi}{3}}$



Geometrija osnovnih operacij v kompleksni ravnini

$$w = |w|e^{i\varphi}$$

Preslikava	transformacija v $\mathbb{C}$
$z \mapsto z + w$	premik za w
$z \mapsto e^{i\varphi}z$	zasuk okrog izhodišča za kot φ
$z \mapsto w \cdot z$	razteg (ali krčenje) za $|w|$ in zasuk za φ

Zanimiv problem

'Čuden stric' vam zapusti veliko bogastvo - zaklad, ki ga je skrbno skril ... Samo vi poznate načrt/mesto, kjer se zaklad nahaja. Poleg načrta vam je poslal tudi razlago : "Na otoku, ki ga poznaš pristanem s čolnom. Na otoku sta samo (en) kaktus in (ena) palma. Od čolna grem do palme in štejem korake. Pri palmi se obrnem za 90^o proti kaktusu in naredim enako število korakov kot od čolna do palme. V pesku označim mesto. Vrnem se do čolna in štejem korake do kaktusa. Obrnem se za 90^o proti palmi in naredim enako korakov kot od čolna do kaktusa. V pesku si označim mesto. Točno na sredini med obema označenima mestoma zakopljem zaklad. Srečno!"

Zaporedja

Kot pove že beseda v ‘naravnem jeziku’, je zaporedje neka urejena množica ‘zaporedoma’ postavljenih elementov. Pri matematiki bomo obravnavali zaporedja števil.

Zaporedje je torej množica ‘zaporedoma postavljenih’ števil. Matematično natančneje rečemo, da je zaporedje preslikava

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

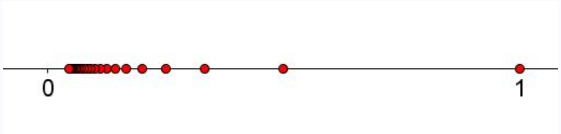
ki vsakemu naravnemu številu i (indeksu) priredi točno določeno realno število a_i. Pri tem je imenujemo i indeks, a_i pa i-ti člen zaporedja.

Opisi, predstavitve zaporedij

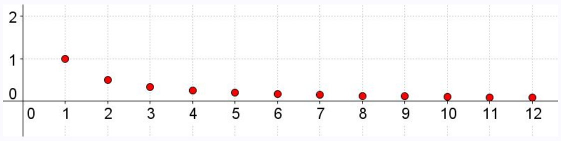
- Z naštevanjem: $1, 2, 4, 8, \ldots$
- Opisno: ‘Vsa soda števila’
- Eksplicitno: $a_n = \frac{1}{n}$ za $n \geq 1$.
  Opazimo, da je zaporedje podano exsplicitno z izrazom $a_n = f(n)$ in neko točno določeno funkcijo $f(x)$.
- Rekurzivno: $a_0 = 1$ in $a_{n+1} = 2a_n$ za $n \geq 0$
  Opazimo, da je zaporedje podano s prvim členom a_0 ali a_1 in neko točno določeno funkcijo $f(x)$, ki pove, kako iz a_n dobimo a_{n+1}.

Geometrijski prikaz zaporedja

- Zaporedje lahko predstavimo kot vrednosti na številski premici:



  Zaporedne člene zaporedja nakazujemo z zaporednim risanjem točk. Ko smo zaporedje narisali, se ne vidi več, 'zaporednosti' členov. Npr. iz slike ne moremo vedeti, kateri člen je tretji in kateri četrti.
- Zaporedje lahko predstavimo kot točke (n, a_n) v ravnini:



  'Abscisa' ali x-koordinata točke pove kateri člen zaporedja je enak 'ordinati' ali y-koordinati.
- Dinamične ilustracije: https://ggbm.at/hakzxd8b v https://www.geogebra.org/m/veaekmg5

Primer 1

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}$$

- Izpišemo nekaj členov: $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \ldots$
- Opazujemo, analiziramo, opišemo

Primer 2

Aritmetično zaporedje

- Intuitivni opis: Začnemo z neko vrednostjo. 'Delamo' enako dolge korake v desno.
- Eksplicitni opis: $a_n = a + nd$
- Rekurzivni opis: $a_0 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$
- Primer: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
- Primer: $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$
- Primer: $1, 1+\sqrt{3}, 1+2\sqrt{3}, 1+3\sqrt{3}, 1+4\sqrt{3}, \ldots$

Primer 3

Geometrijsko zaporedje

- Intuitivni opis: Začnemo z neko vrednostjo. V vsakem koraku prejšnjo vrednost pomnožimo z istim faktorjem.
- Eksplicitni opis: $a_n = aq^n$
- Rekurzivni opis: $a_0 = a$, $a_{n+1} = a_n q$
- Primer: $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$
- Primer: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$
- Primer: $1, \sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9, \ldots$

Primer 4

Fibonaccijevo zaporedje

- Rekurzivni opis: $a_0 = 1, a_1 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$
- Izračun členov: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

Lastnosti zaporedij

- **Naraščajoče** zaporedje: $a_n \leq a_{n+1}$ za vse $n \in \mathbb{N}$;
- **Strogo naraščajoče** zaporedje: $a_n < a_{n+1}$ za vse $n \in \mathbb{N}$;
- **Padajoče** zaporedje: $a_n \geq a_{n+1}$ za vse $n \in \mathbb{N}$;
- **Strogo padajoče** zaporedje:
  $a_n > a_{n+1}$ za vse $n \in \mathbb{N}$;
- **Navzgor omejeno** zaporedje:
  Obstaja zgornja meja $M \in \mathbb{R}$, da velja $a_n \leq M$ za vse $n \in \mathbb{N}$.
- **Navzdol omejeno** zaporedje:
  Obstaja spodnja meja $m \in \mathbb{R}$, da velja $m \leq a_n$ za vse $n \in \mathbb{N}$.
- **Navzgor in navzdol omejeno** zaporedje:
  Obstajata meji $m, M \in \mathbb{R}$, da velja $m \leq a_n \leq M$ za vse $n \in \mathbb{N}$.

Primer 1

Naraščajoča zaporedja

- $a_n = n$
- $b_n = n + \frac{1}{n}$
- $c_n = 1 - \frac{1}{n}$
- $d_n = -\frac{1}{n}$
- $\{1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7 \dots\}$

Primer 2

Strogo naraščajoča zaporedja

- $a_n = n$
- $b_n = n + \frac{1}{n}$
- $c_n = 1 - \frac{1}{n}$
- $d_n = -\frac{1}{n}$
- $\{1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 7 \dots\}$ je naraščajoče, **NI** pa strogo naraščajoče.

Primer 3

Padajoča zaporedja

- $a_n = 1 - n$
- $b_n = \frac{1}{n} - n$
- $c_n = 1 + \frac{1}{n}$
- $\{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\}$

Primer 4

Strogo padajoča zaporedja

- $a_n = 1 - n$
- $b_n = \frac{1}{n} - n$
- $c_n = 1 + \frac{1}{n}$
- $\{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\}$ je padajoče, **NI** pa strogo padajoče.

Primer 5

Navzgor omejeno zaporedje

- $a_n = 1 - n$
- $b_n = 1 - \frac{1}{n}$
- $c_n = 1 + \frac{1}{n}$

Primer 6

Navzdol omejeno zaporedje

- $a_n = 1 + n$
- $b_n = 1 - \frac{1}{n}$
- $c_n = 1 + \frac{1}{n}$

Primer 7

Navzgor in navzdol omejeno zaporedje

- $a_n = 1 - \frac{1}{n}$
- $b_n = 1 + \frac{1}{n}$