# Diskretne strukture

Četrti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

29. oktober 2021

# Prvi pomožni sklep: pogojni sklep

Kadar osnovna pravila sklepanja ne zadoščajo za dokaz pravilnosti sklepa, si pomagamo še z enim od treh pomožnih sklepov, ki jih bomo spoznali v nadaljevanju. Sprva pogojni sklep.

*Pogojni sklep (PS)* uporabljamo, kadar ima zaključek sklepa obliko implikacije, tj. $B \Rightarrow C$.

**Trditev**

*Sklep*

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \models B \Rightarrow C \tag{1}$$

*je pravilen natanko tedaj, ko je pravilen sklep*

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, B \models C. \tag{2}$$

Z besedami lahko zgornjo trditev povemo takole: Če je v zaključku sklepa implikacija $B \Rightarrow C$, potem tvorimo nov sklep tako, da:

- Izjavni izraz $B$ dodamo med predpostavke, zaključek pa spremenimo v $C$.
- Prvotni sklep je pravilen, če in samo če je pravilen novi sklep.

## Utemeljitev pravilnosti zadnje trditve.

- V izjavnih izrazih $A_1, \dots, A_k, B, C$ nastopajo spremenljivke $p, q, r, \dots$.
- Sklep (1) je nepravilen, če in samo če obstaja nabor vrednosti spremenljivk, tako da je $A_1 = A_2 = \dots = A_k = 1$ in $(B \Rightarrow C) = 0$. Izraz $B \Rightarrow C$ pa ima vrednost 0, če in samo če je $B = 1$ in $C = 0$.
- Sklep (2) je nepravilen, če in samo če obstaja nabor vrednosti spremenljivk, tako da je $A_1 = A_2 = \dots = A_k = B = 1$ in $C = 0$.
- Torej sta sklepa (1) in (2) res nepravilna pri natanko istih vrednostih spremenljivk. To pa ravno trdi trditev, ki jo dokazujemo.

$\square$

Cilj uporabe PS je, da sklep (2) postane lažji za obravnavo kot sklep (1). Morda pravilnosti sklepa (1) nismo mogli dokazati z uporabo osnovnih pravil sklepanja, pravilnost sklepa (2) pa bomo lažje dokazali.

# Zgled uporabe pogojnega sklepa

**Primer**

*Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek $p \Rightarrow q$.*

| | | |
|---|---|---|
| *1.* | $p \Rightarrow q \vee r$ | *predpostavka* |
| *2.* | $\neg r$ | *predpostavka* |
| *3.1.* | $p$ | *predpostavka PS* |
| *3.2.* | $q \vee r$ | *MP(1,3.1)* |
| *3.3.* | $q$ | *DS(3.2,2)* |
| *3.* | $p \Rightarrow q$ | *PS(3.1,3.3)* |

# Zgled napačne uporabe pogojnega sklepa

**Primer**

*Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek $q$.*

| | | |
|---|---|---|
| *1.* | $p \Rightarrow q \vee r$ | *predpostavka* |
| *2.* | $\neg r$ | *predpostavka* |
| *3.1.* | $\quad p$ | *predpostavka PS* |
| *3.2.* | $\quad q \vee r$ | *MP(1,3.1)* |
| *3.3.* | $\quad q$ | *DS(3.2,2)* |
| *3.* | $p \Rightarrow q$ | *PS(3.1,3.3)* |
| *4.* | $q$ | *DS(2,3.2)* |

*Sklep je napačen, saj je nabor vrednosti $p \sim q \sim r \sim 0$ protiprimer.*

*Po zaključku pogojnega sklepa, ne smemo uporabljati zamaknjenih vrstic.*

# Drugi pomožni sklep: sklep s protislovjem

*Sklep s protislovjem (RA)* lahko uporabljamo kadarkoli.

**Trditev**

*Sklep*

$$A_1, A_2, \ldots, A_k \models B \tag{3}$$

*je pravilen natanko tedaj, ko je pravilen sklep*

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, \neg B \models 0. \tag{4}$$

**Dokaz.**

- V izjavnih izrazih $A_1, \ldots, A_k, B$ nastopajo spremenljivke $p, q, r, \ldots$.
- Sklep (3) je nepravilen, če in samo če obstaja nabor vrednosti spremenljivk, tako da je $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = 1$ in $B = 0$.
- Sklep (4) je nepravilen, če in samo če obstaja nabor vrednosti spremenljivk, tako da je $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = \neg B = 1$. Izraz $\neg B$ pa ima vrednost 1, če in samo če je $B = 0$.
- Torej sta sklepa (3) in (4) res nepravilna pri natanko istih vrednostih spremenljivk. To pa ravno trdi trditev, ki jo dokazujemo. □

# Zgled uporabe sklepa s protislovjem

## Primer

*Pokaži, da iz $p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$, $s \land q \Rightarrow r$ in $s$ sledi $\neg p$.*

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$ | predpostavka |
| 2. | $s \land q \Rightarrow r$ | predpostavka |
| 3. | $s$ | predpostavka |
| 4.1. | $\quad \neg\neg p$ | predpostavka RA |
| 4.2. | $\quad p$ | $\sim$4.1 |
| 4.3. | $\quad \neg(q \Rightarrow r)$ | MP(1,4.2) |
| 4.4. | $\quad q \land \neg r$ | $\sim$4.3 |
| 4.5. | $\quad q$ | Po(4.4) |
| 4.6. | $\quad \neg r$ | Po(4.4) |
| 4.7. | $\quad s \land q$ | Zd(3,4.5) |
| 4.8. | $\quad r$ | MP(2,4.7) |
| 4.9. | $\quad r \land \neg r \sim 0$ | Zd(4.8,4.6) |
| 4. | $\neg p$ | RA(4.1,4.9) |

# Tretji pomožni sklep: analiza primerov

*Analizo primerov (AP)* lahko uporabljamo, kadar ima ena od predpostavk obliko disjunkcije.

**Trditev**

*Sklep*

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1 \vee B_2 \models C \tag{5}$$

*je pravilen natanko tedaj, ko sta pravilna sklepa*

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_1 \models C \tag{6}$$

*in*

$$A_1, A_2, \ldots, A_k, B_2 \models C. \tag{7}$$

**Dokaz.**

- V izjavnih izrazih $A_1, \ldots, A_k, B_1, B_2, C$ nastopajo spremenljivke $p, q, r, \ldots$.
- Sklep (5) je nepravilen, če in samo če obstaja nabor vrednosti spremenljivk, tako da je $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = (B_1 \vee B_2) = 1$ in $C = 0$. Izraz $B_1 \vee B_2$ pa ima vrednost 1, če in samo če ima $B_1$ vrednost 1 ali pa ima $B_2$ vrednost 1.
- Vsaj eden od sklepov (6) in (7) ni pravilen, če in samo če obstaja nabor vrednosti spremenljivk, tako da je $A_1 = A_2 = \ldots = A_k = 1$, $C = 0$ in ima vsaj eden od izrazov $B_1$, $B_2$ vrednost 1.
- Torej je sklep (5) nepravilen, če in samo če je vsaj eden izmed sklepov (6) in (7) nepravilen. To pa ravno trdi trditev, ki jo dokazujemo. $\square$

$\square$

# Zgled uporabe sklepa z analizo primerov

## Primer

*Pokaži, da iz* $p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$, $\neg(s \wedge q) \vee r$ *in* $s$ *sledi* $\neg p$.

| | | |
|---|---|---|
| *1.* | $p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$ | *predpostavka* |
| *2.* | $\neg(s \wedge q) \vee r$ | *predpostavka* |
| *3.* | $s$ | *predpostavka* |
| *4.1.1.* | $\neg(s \wedge q)$ | *predpostavka* $AP_1$ |
| *4.1.2.* | $\neg s \vee \neg q$ | $\sim$*4.1.1* |
| *4.1.3.* | $\neg q$ | *DS(3,4.1.2)* |
| *4.1.4.* | $p \Rightarrow \neg(\neg q \vee r)$ | $\sim$*1* |
| *4.1.5.* | $\neg q \vee r$ | *Pr(4.1.3)* |
| *4.1.6.* | $\neg p$ | *MT(4.1.4,4.1.5)* |
| *4.2.1.* | $r$ | *predpostavka* $AP_2$ |
| *4.2.2.* | $p \Rightarrow \neg(\neg q \vee r)$ | $\sim$*1* |
| *4.2.3.* | $\neg q \vee r$ | *Pr(4.2.2)* |
| *4.2.4.* | $\neg p$ | *MT(4.2.2,4.2.3)* |
| *4.* | $\neg p$ | *AP(2,4.1,4.2)* |

Poglavje 2

# Predikatni račun

# Zakaj predikatni račun?

- *Izjavni račun (IR)* se ukvarja s *trditvami* in *povezavo med njimi*. Glavno vprašanje IR je:

  *Ali iz resničnosti trditev, ki so zapisane v predpostavkah, sledi resničnost trditev, ki so zapisane v zaključku sklepa?*

- *Predikatni račun (PR)* pa se bo ukvarjal z *elementi neke množice*, njihovimi *lastnostmi* in *povezave med njimi*.

- Glavna razlika PR v primerjavi z IR je ta, da v PR:
  - Izberemo *področje pogovora*, tj. množico, iz katere izbiramo elemente.
  - Poleg logičnih veznikov sta dovoljena še *kvantifikatorja* $\forall$ (za vsak element), $\exists$ (obstaja element).

- PR vsebuje kot poseben primer IR.

# Zakaj predikatni račun?

- Spodnjega sklepanja ne moremo narediti v izjavnem računu.

| | |
|---|---|
| Predpostavki: | *Vsi študentje računalništva morajo opraviti predmet diskretne strukture.* |
| | *Jaka je študent računalništva.* |
| Zaključek: | *Jaka mora opraviti predmet diskretne strukture.* |

- V izjavnem računu bi lahko naredili naslednje sklepanje:

| | |
|---|---|
| Predpostavki: | *Če je Jaka študent računalništva, potem mora opraviti predmet diskretne strukture.* |
| | *Jaka je študent računalništva.* |
| Zaključek: | *Jaka mora opraviti predmet diskretne strukture.* |

- Toda zgornji sklepanji nimata istega pomena.

# Področje pogovora in predikati

*Področje pogovora* $\mathcal{D}$ je neprazna *množica*. Na primer ljudje, številke, živali.

*Predikati* so *logične funkcije*, ki za svoje argumente uporabijo elemente področja pogovora. Ko v predikat vstavimo izbrane elemente, dobimo izjavo, ki ima logično vrednost 1 ali 0. To vrednost vrne predikat.

**Primer**

*Področje pogovora:* $\mathbb{Z}$.

*Predikat:* $P(x, y) =$ "$x > y$".

$P(4, 3)$ *pomeni* "$4 > 3$". *Torej ima* $P(4, 3)$ *logično vrednost 1.*

$P(3, 4)$ *pomeni* "$3 > 4$". *Torej ima* $P(3, 4)$ *logično vrednost 0.*

*Ne velja* $P(x, y) = P(y, x)$.

# Predikati

Število argumentov $x_1, \ldots, x_n$ predikata $P(x_1, \ldots, x_n)$ imenujemo *mestnost predikata*.

**Trditev**

*V izbrani interpretaciji:*

- *Enomestni predikati ustrezajo lastnostim elementov področja pogovora.*
- *Dvomestni predikati ustrezajo zvezam (tudi relacijam) med elementi področja pogovora.*

**Primer**

*Področje pogovora:* $\mathbb{Z}$.

*Enomestni predikat:* $P(x) =$ "$x^2$ *je pozitivno število*".

*Dvomestni predikat:* $P(x, y) =$ "$x > y$".

# Kvantifikatorja

Radi bi izrazili trditve oblike:

- *Nekateri* ptiči ne letijo.
- Kvadrat *poljubnega* realnega števila je nenegativno število.
- Na spletu *nihče* ne pozna tvoje identitete.

V ta namen potrebujemo *dva kvantifikatorja*:

| | | |
|---|---|---|
| $\forall$ | *univerzalni kvantifikator* | "Za vsak" |
| $\exists$ | *eksistenčni kvantifikator* | "Obstaja" |

**Primer**

*Nekateri ptiči ne letijo.*

*Področje pogovora $\mathcal{D}$ ... množica ptičev.*

*Predikat* ... $\exists x \in \mathcal{D}$ : "$x$ *ne leti.*"

# Kvantifikatorja

**Primer**

*Kvadrat poljubnega realnega števila je nenegativno število.*

*Področje pogovora* $\mathcal{D} \ldots$ *množica* $\mathbb{R}$.

*Predikat* $\ldots \forall x \in \mathbb{R}$ : "$x^2 \geq 0.$"

**Primer**

*Na spletu nihče ne pozna tvoje identitete.*

*Področje pogovora* $\mathcal{D} \ldots$ *množica vseh uporabnikov spleta.*

*Predikat* $\ldots \neg(\exists x \in \mathcal{D}$ : "$x$ *pozna tvojo identiteto.*")

# Pomen kvantifikatorjev

Naj bo $\mathcal{D}$ področje pogovora.

$\forall x \in \mathcal{D},\ P(x)$ je izjava, ki je resnična natanko takrat, ko imajo vsi elementi iz $\mathcal{D}$ lastnost $P$. Sicer je neresnična.

$\exists x \in \mathcal{D},\ P(x)$ je izjava, ki je resnična natanko takrat, ko obstaja element iz $\mathcal{D}$, ki ima lastnost $P$. Sicer je neresnična.

**Primer**

*Naj bo $\mathcal{D} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ končna množica. Potem je*

$$\begin{aligned}(\forall x \in \mathcal{D},\ P(x)) &\equiv (P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \ldots \wedge P(x_n)),\\ (\exists x \in \mathcal{D},\ P(x)) &\equiv (P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n)).\end{aligned}$$

**Primer**

*Definiraj ustrezne predikate in zapiši naslednje izjave:*

- *Nekateri ljudje so nepošteni.*
- *Noben človek ni pošten.*
- *Vsi ljudje so nepošteni.*

# Jezik predikatnega računa

- Naj bo $\mathcal{D}$ področje pogovora. V jeziku predikatnega računa uporabljamo:
  - *spremenljivke* $x, y, z, \ldots$ iz $\mathcal{D}$,
  - *konstante* $a, b, c, \ldots$ iz $\mathcal{D}$,
  - *predikate* $P, Q, R, \ldots$,
  - izjavne veznike $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots$,
  - *kvantifikatorja* $\forall$ in $\exists$ ter
  - oklepaja ( in ) .
- Spremenljivkam in konstantam pravimo tudi *termi*.
- *Atomi* predikatnega računa so, na primer,

$$P(x), P(a), Q(x, y), Q(a, x), \ldots$$

  Atome dobimo tako, da terme vstavimo v predikate.