Diskretne strukture

Peti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

5. november 2021

Izjavne formule so definirane induktivno:

1. Atomi so izjavne formule.
2. Če sta W in V izjavni formuli in je x spremenljivka, potem so tudi

$$(\neg W), (W \wedge V), (W \vee V), (W \Rightarrow V), (W \Leftrightarrow V), \ldots$$

$$(\exists x\, W) \quad \text{in} \quad (\forall x\, W)$$

izjavne formule.

Doseg kvantifikatorjev, vezane in proste spremenljivke

- **Doseg kvantifikatorja** je *najmanjši možen*:

  gremo desno od kvantifikatorja in njegove spremenljivke toliko časa, dokler ne dobimo izjavne formule.

- V formuli imamo vezane in proste spremenljivke:
  - vstop spremenljivke x je *vezan*, če se ta x nahaja v dosegu (območju delovanja) kvantifikatorja $\forall x$ ali $\exists x$,
  - vstop spremenljivke, ki ni vezan, je *prost*.

- Kvantifikator veže svojo spremenljivko in proste spremenljivke z istim imenom v svojem dosegu.

- Kvantifikatorji imajo *"isto prednost"* kot negacija.

Doseg kvantifikatorjev; vezane in proste spremenljivke

Primer

Določi doseg kvantifikatorjev in odloči, katere spremenljivke so vezane in katere proste:

- $\forall x\, P(x, y) \wedge Q(x, y)$,

  Rešitev: $\underbrace{\forall x\, P(x, y)}_{\text{doseg kvantifikatorja } \forall x} \wedge Q(x, y)$.

  Spremenljivka x je vezana, spremenljivki y in x pa prosti.

- $\forall x\, P(w, y) \wedge Q(x, y)$,

  Rešitev: $\underbrace{\forall x\, P(w, y)}_{\text{doseg kvantifikatorja } \forall x} \wedge Q(x, y)$.

  Spremenljivka x je vezana, spremenljvke w, y in x pa proste.

Primer

- $\forall x\,(P(x,y) \wedge Q(z,y))$,

  Rešitev: $\underbrace{\forall x\,(P(x,y) \wedge Q(z,y))}_{\textit{doseg kvantifikatorja } \forall x}$.

  Spremenljivka x je vezana, spremenljivki y in z pa prosti.

- $\forall x \neg \exists y \forall z\, P(x,y,z)$,

  Rešitev: $\underbrace{\forall x \neg\, \underbrace{\exists y \quad \underbrace{\forall z\, P(x,y,z)}_{\textit{doseg kvantifikatorja } \forall z}}_{\textit{doseg kvantifikatorja } \exists y}}_{\textit{doseg kvantifikatorja } \forall x}$.

  Spremenljivke x, y in z so vezane.

Primer

- $\exists x \, \neg P(x, y) \Rightarrow Q(x) \wedge R(y)$,

  Rešitev: $\underbrace{\exists x \, \neg P(x, y)}_{\text{doseg kvantifikatorja } \exists x} \Rightarrow Q(x) \wedge R(y)$.

  Spremenljivka x je vezana, spremenljivki y in x sta prosti.

- $\exists x \, P(x) \Rightarrow \forall x \, Q(x) \vee P(x) \wedge R(x) \vee S(y)$.

  Rešitev: $\underbrace{\exists x \, P(x)}_{\text{doseg kvantifikatorja } \exists x} \Rightarrow \underbrace{\forall x \, Q(x)}_{\text{doseg kvantifikatorja } \forall x} \vee P(x) \wedge R(x) \vee S(y)$.

  Spremenljivki x in x sta vezani, spremenljivki x in y sta prosti.

Interpretacija izjavne formule

Interpretacija $\mathcal{I}$ izjavne formule W je sestavljena iz:

- Neprazne množice $\mathcal{D}$, ki ji pravimo *področje pogovora* interpretacije.
- Vsakemu *predikatu* ustreza $0/1$ *logična funkcija* v $\mathcal{D}$.
- Vsaki *konstanti* določimo *vrednost* v $\mathcal{D}$ (ponavadi je implicitno določena že z imenom konstante).
- Vsaki *prosti* spremenljivki v W določimo *vrednost* v $\mathcal{D}$, pri tem vsem prostim spremenljivkam z istim imenom določimo *isto* vrednost iz $\mathcal{D}$.

Pomen kvantifikatorjev

Naj bo W izjavna formula.

- Z $W(x/a)$ označimo formulo, ki jo dobimo tako, da v formuli W vse *proste* vstope spremenljivke x nadomestimo z a.

$$\begin{array}{ll} W & P(x) \lor \exists x\, Q(x,y) \land R(b,x) \\ W(x/a) & P(a) \lor \exists x\, Q(x,y) \land R(b,a) \end{array}$$

  Ne zamenjamo spremenljivke y in vezanega vstopa x-a.

- Formula $\forall x\, W$ je *resnična* v *interpretaciji* $\mathcal{I}$, če je za *vsak* element področja pogovora $d \in \mathcal{D}$ resnična formula $W(x/d)$. Sicer je $\forall x\, W$ neresnična.

- Formula $\exists x\, W$ je *resnična* v *interpretaciji* $\mathcal{I}$, če v področju pogovora *obstaja* $d \in \mathcal{D}$, za katerega je formula $W(x/d)$ resnična. Sicer je $\exists x\, W$ neresnična.

Preimenovanje spremenljivk

Motivacija: V formuli nas motijo spremenljivke z istim imenom, ki so vezane z več različnimi kvantifikatorji ali pa hkrati proste in vezane. To želimo rešiti.

Dejstvo: če je W formula, potem imen *prostih spremenljivk ne smemo spreminjati*, če želimo pridelati enakovredno formulo.

Izkaže se: Vezane spremenljivke lahko *preimenujemo* tako, da *ista* spremenljivka (tj. spremenljivka z istim imenom)

- ne nastopa pri več kvantifikatorjih,
- ni hkrati vezana in prosta.

Slednje dosežemo tako, da vezane spremenljivke v nekem zaporedju preimenujemo z novimi črkami, ki niso prepovedane, tj. niso proste in niso že uporabljene v vezanih spremenljivkah.

Primer

Preimenuj spremenljivke v spodnji formuli v skladu z zgornjo željo:

$$\forall x \exists y\, (P(x,y) \Rightarrow \exists x\, Q(x,y) \vee \forall y\, R(x,y)) \vee S(y).$$

Rešitev:

- $\forall x \exists y\, (P(x,y) \Rightarrow \exists x\, Q(x,y) \vee \forall y\, R(x,y)) \vee S(y)$.
- y *je prosta, zato jo pustimo pri miru.*
- *Vezane so* y, x, y, x*. Preimenovali bomo v tem vrstnem redu.*
- *Črka* y *je prepovedana, zato jo primenujemo v* z.
- *Črka* x *še ni prepovedana, zato jo pustimo pri miru.*
- *Črka* y *je prepovedana, zato jo primenujemo v* w.
- *Črka* x *je prepovedana, zato jo primenujemo v* t.
- *Dobimo* $\forall t \exists w\, (P(t,w) \Rightarrow \exists x\, Q(x,w) \vee \forall z\, R(t,z)) \vee S(y)$.

Enakovredne izjavne formule

- Izjavni formuli W in V sta *enakovredni*, če imata *isto* logično *vrednost* v *vseh* možnih *interpretacijah*. To označimo z $W \sim V$.

- Interpretacija formul W in V pomeni, da vse predikate, konstante in spremenljivke hkrati izbiramo iz *istega* področja pogovora. Tudi pomen predikatov v obeh formulah mora biti *isti*.

- Izjavna formula W je:
  - *splošno veljavna*, če je *resnična* v *vsaki* interpretaciji.
  - *neizpolnljiva*, če je *neresnična* v *vsaki* interpretaciji.

- Splošno veljavne in neizpolnljive izjavne formule so ustreznice tavtologij in protislovij v predikatnem računu.

Zakoni predikatnega računa

Pomembni pari enakovrednih izjavnih formul:

1. *de Morganova zakona*:

$$\neg\forall x\, W \sim \exists x\, \neg W$$
$$\neg\exists x\, W \sim \forall x\, \neg W$$

2. *zamenjava istovrstnih kvantifikatorjev*:

$$\forall x \forall y\, W \sim \forall y \forall x\, W$$
$$\exists x \exists y\, W \sim \exists y \exists x\, W$$

3. *distributivnost*:

$$\forall x\, (W \wedge V) \sim \forall x\, W \wedge \forall x\, V$$
$$\exists x\, (W \vee V) \sim \exists x\, W \vee \exists x\, V$$

Zakoni predikatnega računa z omejitvami

Če se x *ne pojavi prosto* v formuli C, potem veljajo naslednje enakovredosti:

1. *kvantifikator in disjunkcija*:

$$\forall x\,(C \lor W) \sim C \lor \forall x\, W$$
$$\exists x\,(C \lor W) \sim C \lor \exists x\, W$$

2. *kvantifikator in konjunkcija*:

$$\forall x\,(C \land W) \sim C \land \forall x\, W$$
$$\exists x\,(C \land W) \sim C \land \exists x\, W$$

Preneksna normalna oblika (PNO)

Trditev

Vsako formulo lahko enakovredno zapišemo tako, da se kvantifikatorji nahajajo samo na začetku.

Formuli iz trditve pravimo *preneksna normalna oblika (PNO)* dane izjavne formule.

Postopek za preoblikovanje v PNO:

1. *Preimenujemo* spremenljivke.
2. *Znebimo* se $\Rightarrow$ in $\Leftrightarrow$, raje imamo $\neg$, $\wedge$ in $\vee$.
3. Izvlečemo *kvantifikatorje* na *začetek* z uporabo zakonov predikatnega računa.

Primer

Preoblikuj naslednjo izjavno formulo v preneksno normalno obliko:

$$\forall x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) \Rightarrow D(x) \wedge \exists x\, D(x)$$

Rešitev:

- $\forall x\, A(x) \vee \exists x\, B(x) \Rightarrow D(x) \wedge \exists x\, D(x).$
- $((\forall w\, A(w)) \vee (\exists z\, B(z))) \Rightarrow (D(x) \wedge (\exists y\, D(y))).$
- $\neg((\forall w\, A(w)) \vee (\exists z\, B(z))) \vee (D(x) \wedge (\exists y\, D(y))).$
- $((\exists w \neg A(w)) \wedge (\forall z \neg B(z))) \vee (D(x) \wedge (\exists y\, D(y))).$
- $\exists w\, ((\neg A(w)) \wedge (\forall z \neg B(z))) \vee (D(x) \wedge (\exists y\, D(y))).$
- $\exists w \forall z\, ((\neg A(w)) \wedge (\neg B(z))) \vee (D(x) \wedge (\exists y\, D(y))).$
- $\exists w \forall z\, ((\neg A(w)) \wedge (\neg B(z))) \vee \exists y\, (D(x) \wedge D(y)).$
- $\exists w\, (\forall z\, ((\neg A(w)) \wedge (\neg B(z))) \vee \exists y\, (D(x) \wedge D(y))).$
- $\exists w \forall z\, (((\neg A(w)) \wedge (\neg B(z))) \vee \exists y\, (D(x) \wedge D(y))).$
- $\exists w \forall z \exists y\, (((\neg A(w)) \wedge (\neg B(z))) \vee (D(x) \wedge D(y))).$