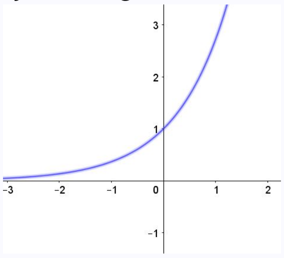
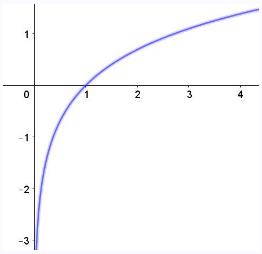
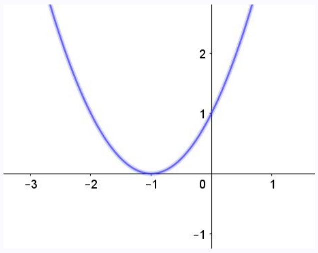
Sode in lihe funkcije - Primer 3

Funkcije $f(x) = e^x$, $g(x) = \ln x$ in $h(x) = x^2 + 2x + 1$ so zaporedoma predstavljene na spodnjih treh grafih:





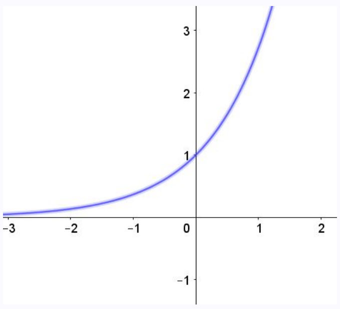


Nobena od funkcij ni niti soda niti liha.

Injektivne in surjektivne funkcije

- Funkcija $f(x)$ je **injektivna**, če za $x_1 \neq x_2$ velja $f(x_1) \neq f(x_2)$.
  To pomeni, da injektivna funkcija pri dveh različnih vrednostih ne more imeti iste vrednosti. Velja tudi, da vsaka vodoravna premica seka graf injektivne funkcije največ enkrat.
- Funkcija $f(x)$ je **surjektivna**, če za vsako vrednost $y \in \mathbb{R}$ obstaja vrednost $x \in \mathcal{D}_f$, da velja $f(x) = y$.
  Na kratko lahko rečemo tudi, da surjektivna funkcija zavzame vsako vrednost ali preprosto, da velja $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$. Velja tudi, da vsaka vodoravna premica seka graf surjektivne funkcije vsaj enkrat.
- Funkcija $f\ \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ je **bijektivna**, če je injektivna in surjektivna.

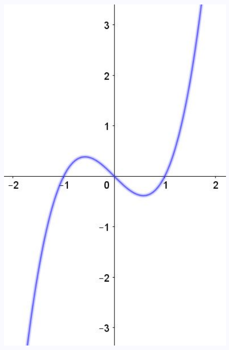
Primer 1



Funkcija $f(x) = e^x$

- je injektivna, ker vsako vrednost zavzame samo enkrat;
- ni surjektivna, ker ne zavzame negativnih vrednosti;
- ni bijektivna, ker ni surjektivna.

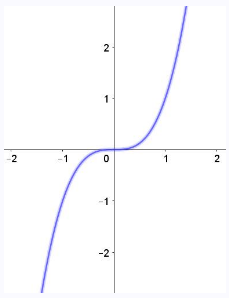
Primer 2



Funkcija $f(x) = x^3 - x$

- ni injektivna, ker ne zavzame vsake vrednosti samo enkrat. Na primer vrednost 0 zavzame kar trikrat, namreč $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$.
- Funkcija je surjektivna, ker zavzame vse vrednosti: $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$.
- Funkcija ni bijektivna, ker ni injektivna.

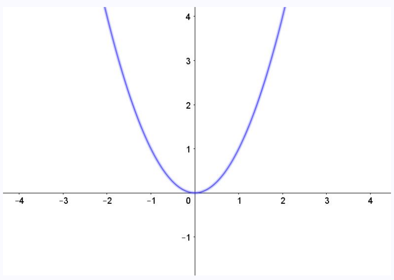
Primer 3



Funkcija $f(x) = x^3$

- je injektivna, ker vsako vrednost zavzame samo enkrat;
- je surjektivna, ker zavzame vse vrednosti: $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$;
- je bijektivna, ker je injektivna in surjektivna.

Primer 4



Funkcija $f(x) = x^2$

- ni injektivna, ker ni res, da zavzame vsako vrednost samo enkrat. Na primer vrednost 1 zavzame dvakrat, namreč $f(-1) = f(1) = 1$.
- Funkcija ni surjektivna, ker ne zavzame negativnih vrednosti.
- Funkcija ni bijektivna, ker ni niti injektivna niti surjektivna.

Kompozitum ali sestavljena funkcija

Za funkciji $f(x)$ in $g(x)$ definiramo **kompozitum** funkcij

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Poenostavljeno povedano kompozitum dveh funkcij pomeni ‘zaporedno delovanje dveh funkcij’, ki ga smatramo kot novo funkcijo.

Kompozitum (ali komponiranje dveh funkcij) pomeni, da poljubno vrednost neodvisne spremenljivke najprej vstavimo v prvo funkcijo in dobljeno vrednost te prve funkcije vstavimo v drugo funkcijo. Dobljena vrednost, ki jo tako izračuna druga funkcija je vrednost kompozituma teh dveh funkcij pri dani vrednosti neodvisne spremenljivke.

V splošnem $f \circ g \neq g \circ f$.

Primer 1

Naj bo $f(x) = 2x$ in $g(x) = x + 1$. Izračunajmo $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Izračunajmo najprej
$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 5.$$

Splošno za poljubno vrednost neodvisne spremenljivke x pa dobimo
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = 2x + 1.$$

Primer 2

Naj bo kot v prejšnjem primeru $f(x) = 2x$ in $g(x) = x + 1$. Tokrat izračunajmo $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

Izračunajmo najprej
$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(3) = 6.$$

Splošno za poljubno vrednost neodvisne spremenljivke x pa dobimo
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = 2x + 2.$$

Vidimo torej, da je že za tako preprosti funkciji $f \circ g \neq g \circ f$.

Inverzna funkcija

Če je $f(x)$ **injektivna** funkcija, potem funkcijo $\mathbf{f^{-1}}(x)$, za katero velja
$$(f^{-1} \circ f)(x) = x \quad \text{in} \quad (f \circ f^{-1})(x) = x,$$
imenujemo **inverzna funkcija** funkcije f.

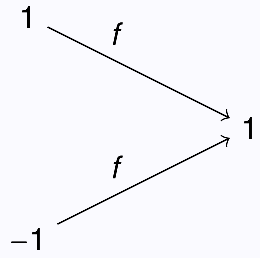
Zgornji pogoj zapišemo tudi
$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id,$$
pri čemer id označuje identično funkcijo $id(x) = x$. Rečemo tudi, da sta si taki funkciji f in f^{-1} druga drugi inverzni.

- Za označevanje funkciji $f(x)$ inverzne funkcije uporabimo oznako $f^{-1}(x)$. S tem želimo poudariti, da gre pri inverzni funkciji za 'obratni proces' kot pri osnovni funkciji. Če je na primer $f(3) = 2$ in bo funkcija f imela inverz, bo $f^{-1}(2) = 3$.
- Inverznost, oziroma 'obratnost delovanja' ali recipročnost funkcije in njenega inverza nakažemo tudi s skico

$$\begin{tikzcd} \mathrm{x} \arrow[r, bend left, "f"] & \mathrm{x} \arrow[l, bend left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

O lastnostih inverzne funkcije

- Zakaj mora biti funkcija injektivna, če naj ima inverzno funkcijo? Če funkcija ni injektivna, potem funkcija vsaj dve različni vrednosti preslika v isto vrednost. Na primer, če bi imeli $f(-1) = f(1) = 1$, potem za inverzno funkcijo f^{-1} ne bi mogli določiti, koliko naj bo njena vrednost pri 1, saj 'obratni proces' ne bi bil mogoč oziroma dobro določen. Po eni strani bi moralo veljati $f^{-1}(1) = -1$ po drugi pa $f^{-1}(1) = 1$, vemo pa, da mora biti $f^{-1}(1)$, če naj bo f^{-1} funkcija, enolično določen.



- Ko razmišljamo o inverzni funkciji je podobno, kot če bi se v originalni funkciji zamenjali vlogi odvisne in neodvisne spremeljivke. Odvisna spremenljivka ('rezultat') originalne funkcije postane neodvisna spremenljivka ('podatek') inverzne funkcije in kar je bila neodvisna spremenljivka ('podatek') originalne funkcije postane odvisna spremenljivka ('rezultat') inverzne funkcije. To lahko zapišemo
$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x.$$
Inverzno funkcijo f^{-1} torej lahko izračunamo tako, da zamenjamo vlogi spremenljivk v običajnem zapisu $y = f(x)$, torej $x = f(y)$, in nato kot funkcijo x-a izrazimo $y = f^{-1}(x)$.
- Graf inverzne funkcije f^{-1} dobimo tako, da prezrcalimo graf funkcije f prek simetrale lihih kvadrantov.

Dinamična vizualizacija: https://ggbm.at/y6peydqr v https://www.geogebra.org/m/veaekmg5.

Opozorilo

Bodimo pozorni, namreč $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)} = (f(x))^{-1}$. Pri funkcijah f^{-1} pomeni 'obratni funkcijski proces', medtem ko pri številih $a^{-1} = \frac{1}{a}$ pomeni 'obratno število' v smislu produkta.Tako kot je množenje z $a^{-1} = \frac{1}{a}$ obraten proces množenju z a, je uporaba inverzne funkcije obraten proces uporabi osnovne funkcije.

$$x \xrightarrow{\cdot a} x \cdot a \xrightarrow{\cdot a^{-1}} x \cdot a \cdot a^{-1} = x$$
$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{f^{-1}} f^{-1}(f(x)) = x$$

Primer

Funkciji $f(x) = 2x + 1$ poiščimo inverzno funkcijo. Linearna funkcija $f(x) = 2x + 1$ je injektivna, zato njena inverzna funkcija obstaja. Zapišemo $y = 2x + 1$ in zamenjamo vlogi x in y ter izrazimo y: $x = 2y + 1 \Longrightarrow y = \frac{x-1}{2} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.Dobili smo torej $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$. Izračunajmo:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x+1) = \frac{2x+1}{2} - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = x,$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}) = 2(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}) + 1 = x - 1 + 1 = x.$$

Torej za funkcijo f^{-1} res velja $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = id$, kar pomeni, da sta si funkciji $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ in $f(x) = 2x + 1$ inverzni.

Transformacije funkcij

S kompozitumom funkcij so povezane tudi **transformacije funkcij**, s katerimi si pomagamo pri razumevanju in risanju raznih funkcij. Če vzamemo enostavno linearno funkcijo $g(x) = x + 1$ in poljubno funkcijo $f(x)$, potem s komponiranjem teh dveh funkcij dobimo **navpični** in **vodoravni** premik funkcije $f(x)$.

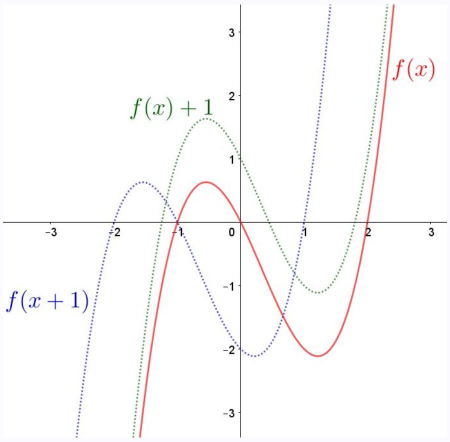
Namreč,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1$$

in

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1).$$

Na sliki desno so ponazorjeni grafi osnovne funkcije $f(x)$ in premikov za 1 v levo in za 1 navzgor.



Podobno kot s premiki si pri razumevanju in risanju funkcij pomagamo še z raztegi in zrcaljenji.

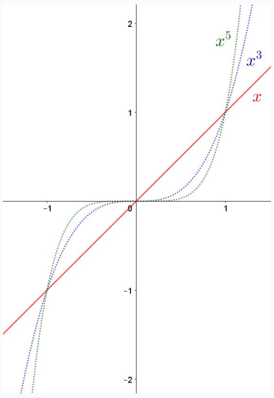
- Funkcija $f(x - a)$ pomeni vodoravni premik funkcije $f(x)$ za a v desno.
- Funkcija $f(x) + c$ pomeni navpični premik funkcije $f(x)$ za c navzgor .
- Funkcija $f(\frac{x}{a})$ pomeni vodoravni razteg funkcije $f(x)$ za faktor a.
- Funkcija $c \cdot f(x)$ pomeni navpični razteg funkcije $f(x)$ za faktor c.
- Funkcija $-f(x)$ pomeni zrcaljenje funkcije $f(x)$ preko osi x.
- Funkcija $f(-x)$ pomeni zrcaljenje funkcije $f(x)$ preko osi y.

Transformacije funkcij lahko nazorno predstavimo z dinamičnimi vizualizacijami https://www.geogebra.org/m/ppetkarn V https://www.geogebra.org/m/veaekmg5.

Potenčna funkcija

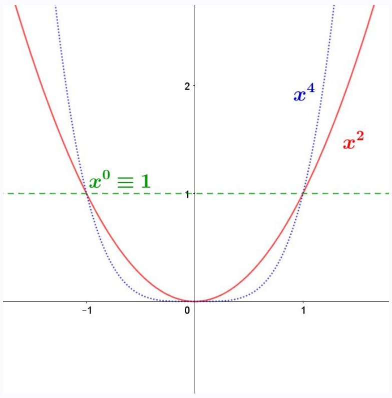
Kaj je potenčna funkcija?

Potenčna funkcija je vsaka funkcija oblike $f(x) = x^a$. Najbolje poznane potenčne funkcije so $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$ in druge. Potenčna funkcija je tudi $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ in druge funkcije, pri katerih je $a \in \mathbb{R}$.



Potenčne funkcije z liho pozitivno potenco so oblike $f(x) = x^{2k+1}$ za $k \in \mathbb{N}$. Te funkcije imajo lastnosti:

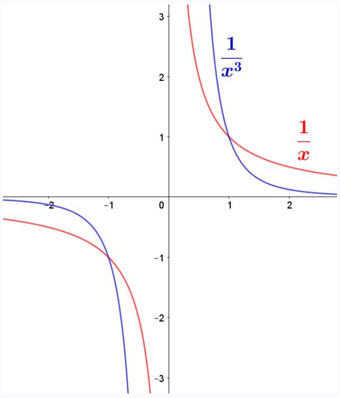
- definirane so na celi realni osi, torej $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$;
- zaloga vrednosti je cela realna os, torej $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$;
- so lihe funkcije:
- so strogo naraščajoče funkcije na celem $\mathcal{D}_f$;
- so injektivne, surjektivne in torej tudi bijektivne funkcije.



Potenčne funkcije s sodo pozitivno potenco so oblike $f(x) = x^{2k}$ za $k \in \mathbb{N}$. Te funkcije imajo lastnosti:

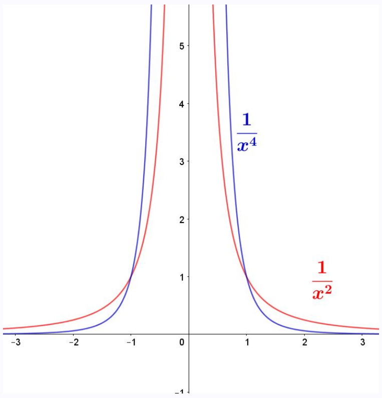
- definirane so na celi realni osi, torej $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$;
- zaloga vrednosti so vsa pozitivna realna števila, kar lahko zapišemo $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}^+$;
- so sode funkcije:
- so strogo padajoče na intervalu $(-\infty, 0]$ in strogo naraščajoče na intervalu $[0, \infty)$;
- niso niti injektivne niti surjektivne;

Med potenčne funkcije s sodo potenco lahko štejemo tudi zelo posebno in enostavno **konstantno** funkcijo $f(x) = x^0 \equiv 1$. To je funkcija za katero velja $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_f = \{1\}$, je soda funkcija, ker je konstanta seveda niti ne narašča niti ne pada in seveda ni niti injektivna niti surjektivna.



Potenčne funkcije z liho negativno potenco so oblike $f(x) = x^{-(2k+1)} = \frac{1}{x^{2k+1}}$ za $k \in \mathbb{N}$. Te funkcije imajo lastnosti:

- definirane so na celi realni osi, razen pri $x = 0$, torej $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$;
- zaloga vrednosti je cela realna os, razen vrednosti 0, torej $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R} - \{0\}$;
- so lihe funkcije;
- so strogo padajoče funkcije na celem definicijskem območju $\mathcal{D}_f$;
- so injektivne, surjektivne pa niso, ker ne zavzamejo vrednosti 0.

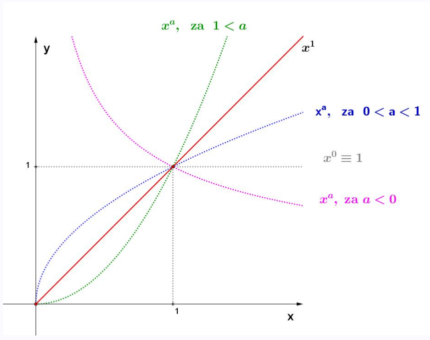


Potenčne funkcije s sodo negativno potenco so oblike $f(x) = x^{-(2k)} = \frac{1}{x^{2k}}$ za $k \in \mathbb{N}$. Te funkcije imajo lastnosti:

- definirane so na celi realni osi, razen pri $x = 0$, torej $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{0\}$;
- zaloga vrednosti so vsa pozitivna števila, torej $\mathcal{Z}_f = (0, \infty) = \mathbb{R}^+$;
- so sode funkcije:
- so strogo naraščajoče funkcije na intervalu $(-\infty, 0)$ in strogo padajoče na intervalu $(0, \infty)$;
- niso niti injektivne niti surjektivne.

Dinamična vizualizacija potenčnih funkcij s celoštevilskimi potencami je dostopna na povezavi https://ggbm.at/hk4hvcwq V https://www.geogebra.org/m/veaekmg5.

Potenčne funkcije s potenco, ki ni nujno celo število, so tudi potenčne funkcije. Pri teh je potrebna posebna previdnost.



Namreč že za $a = \frac{1}{2}$ je potenčna funkcija oblike $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ definirana le za pozitivne vrednosti spremenljivke x.

V splošnem so torej potenčne funkcije definirane le za pozitivne vrednosti x-a. Vse potenčne funkcije gredo skozi točko $(1, 1)$. Za razumevanje je koristno in zanimivo opazovati, kako se potenčna funkcija enakomerno (zvezno) spreminja s spreminjanjem potence a. 'Nezveznost' ali 'skok' se zgodi samo pri $a = 0$.

Dinamična vizualizacija splošnih potenčnih funkcij je dostopna na povezavi https://ggbm.at/zudfntfv V https://www.geogebra.org/m/veaekmg5.

Polinomi

Linearno in kvadratno funkcijo že dobro poznamo iz srednje šole. Običajno ju zapišemo v obliki $f(x) = kx + n$ in $f(x) = ax^2 + bx + c$. Opazimo, da 'dobimo' kvadratno funkcijo, če linearni funkciji dodamo 'kvadratni člen'. Na primer, če linearni funkciji $f(x) = 2x + 1$ 'dodamo' x^2, dobimo kvadratno funkcijo $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

- Linearna funkcija (na primer $f(x) = 2x + 1$) je **polinom prve stopnje**.
- Kvadratna funkcija (na primer $f(x) = x^2 + 2x + 1$) je **polinom druge stopnje**.
- Če dodamo še 'tretjo potenco' (na primer $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x + 1$) dobimo **polinom tretje stopnje**.
- Če dodamo še 'več potenc', kjer je 'najvišja sedma potenca' (na primer $f(x) = x^7 - x^5 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$) dobimo **polinom sedme stopnje**.

Funkcija oblike

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

pri čemer je $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, je **polinom** stopnje n zapisan v splošni obliki.

- Števila $a_0, a_1, \ldots, a_n$ imenujemo koeficiente polinoma. Koeficient a_n, to je število ob najvišji potenci se imenuje **vodilni koeficient** polinoma in mora biti različen od 0. To je koeficient, ki določa stopnjo polinoma, ki je enaka n. Ostali koeficienti so lahko tudi enaki 0. Koeficient a_0 se imenuje **začetna vrednost** polinoma.
- Polinomi so definirani za vsa realna števila: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Ničelna oblika polinoma: Polinom je včasih mogoče zapisati v ničelni obliki, to je kot produkt samih linearnih faktorjev.

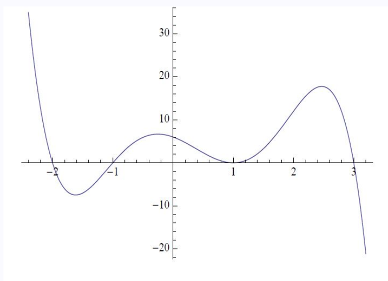
- Na primer polinom druge stopnje $p(x) = x^2 - 1$ lahko zapišemo kot $p(x) = (x+1)(x-1)$. Slednje že poznamo kot kvadratno funkcijo zapisano v ničelni obliki.
- Polinom tretje stopnje $p(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ lahko zapišemo kot produkt linearnih faktorjev $p(x) = (x+1)(x+1)(x-1) = (x+1)^2(x-1)$.
- Polinom stopnje n, ki ga je mogoče zapisati kot produkt samih linearnih faktorjev, bo oblike $p(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$.
- Zapis polinoma v ničelni obliki je pomemben, ker iz takega zapisa razberemo ničle polinoma.

Primer

Z računom lahko preverimo, da je

$$p(x) = -x^5 + 2x^4 + 6x^3 - 8x^2 - 5x + 6 = -(x-1)^2(x+2)(x+1)(x-3)$$

Iz zapisa polinoma v ničeni obliki razberemo, da ima polinom ničle pri $1, -2, -1$ in 3. Ker je v izrazu $(x-1)^2$ druga stopnja, rečemo, da je 1 ničla druge stopnje. Podobno kot pri funkciji $f(x) = x^2$ se polinom v ničli druge stopnje x-osi le dotakne. Glede na stopnje pri posameznih ničlah polinoma lahko sklepamo, da se pri posamezni ničli, ki je na primer stopnje k, polinom obnaša podobno kot se obnaša $f(x) = x^k$ ali kot $f(x) = -x^k$. Če narišemo zgornji polinom, dobimo desno sliko



Nerazcepni polinomi: Ni pa mogoče razcepiti vsakega polinoma. Obstajajo tudi polinomi, ki (realnih) ničel sploh nimajo.

- V obliki produkta linearnih faktorjev ne moremo zapisati na primer polinoma $p(x) = x^2 + 1$. Ta nima (realnih) ničel in ga zato ni mogoče zapisati kot produkt linearnih faktorjev. Rečemo tudi, da polinoma v $\mathbb{R}$ ni mogoče razcepiti na linearne faktorje.
- Tak polinom je mogoče razcepiti v kompleksnih številih $\mathbb{C}$. Namreč $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$, kjer je $i \in \mathbb{C}$ kompleksno število, za katerega velja $i^2 = -1$.
- Podobno je v $\mathbb{R}$ nerazcepen vsak polinom oblike $p(x) = x^2 + c$ za $c > 0$. Tak polinom se razcepi v $\mathbb{C}$ kot $x^2 + c = (x - i\sqrt{c})(x + i\sqrt{c})$.
- Od tu lahko hitro sklepamo, da obstajajo zapleteni polinomi, ki ničel sploh nimajo. Na primer $p(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)(x^2 + 5) = x^6 + 8x^4 + 17x^2 + 10$ nima nobene realne ničle.
- Velja pa, da ima vsak polinom lihe stopnje vsaj eno (realno) ničlo.
- Iz zapisa polinoma v ničelni obliki lahko sklepamo, da ima polinom stopnje n kvečjemu n ničel.
- Mnoge polinome je težko razcepiti in ugotoviti, kakšne ničle imajo. Za vse polinome pa velja, da jih je mogoče razcepiti na dva načina:
  - na linearne in nerazcepne kvadratne faktorje s koeficienti v $\mathbb{R}$. Na primer $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x^2 + 1)$.
  - na linearne faktorje s koeficienti v $\mathbb{C}$. Na primer $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1)(x - i)(x + i)$.

Polinom skozi dane točke: Z poljubne točke z različnimi x-vrednostmi vedno obstaja polinom, katerega graf vsebuje vse te točke. Če je točk n, obstaja tak polinom (že) stopnje $n - 1$.

- V primeru dveh točk je jasno, da dve točki določata premico, kar je graf polinoma prve stopnje. To dejstvo že poznamo.
- Tri točke določajo polinom druge stopnje, to je kvadratna funkcija. Tudi to dejstvo že poznamo in bi z nekaj računanja najbrž znali tak polinom poiskati.
- V primeru točk (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, iščemo polinom $p(x)$ stopnje $n - 1$, za katerega bo veljalo $p(x_i) = y_i$. Kako tak polinom dobimo si bomo pogledali na konkretnem primeru.

Primer

Vzemimo npr. točke

$$(1,-5),\ (2,6),\ (3,-7),\ (4,9).$$

- Zapišimo izraze:

$$\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)}(-5) \quad \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)}6$$

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)}(-7) \quad \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}9$$

- Opazimo preprost vzorec oblikovanja teh štirih izrazov. Prvi izraz smo dobili tako, da smo v števcu napisali tri produkte oblike $(x - \underline{\quad})$ in zaporedoma vstavili x-koordinate vseh razen prve točke. V imenovalcu pa enako, le da smo namesto x vpisali x-koordinato prve točke. Tako dobljen ulomek smo pomnožili z y-koordinato prve točke. Lahko je preveriti, da je prvi izraz polinom tretje stopnje, ki ima pri 1 vrednost -5 pri $2, 3, 4$ pa vrednost nič. Podobno je drugi izraz oblikovan tako, da ima pri 2 vrednost 6, pri vseh ostalih pa vrednost 0. In podobno še za preostala dva. Če vse štiri izraze seštejemo, dobimo polinom tretje stopnje, ki vsebuje vse štiri dane točke.
- Algoritem takega iskanja polinoma skozi dane točke morebiti izgleda računsko dolg, a je za uporabo računalniškega računanja zelo preprost.
- Takemu polinomu rečemo **interpolacijski polinom**.

Dinamična vizualizacija: https://ggbm.at/s8wzbdkb v https://www.geogebra.org/m/veaekmg5.

Racionalne funkcije

Racionalne funkcije so funkcije v obliki ulomka

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kjer sta funkciji $p(x)$ v števcu in $q(x)$ v imenovalcu polinoma.

Primer

Vzemimo racionalno funkcijo $r(x) = \frac{x^2+x}{x^2-4}$ in jo zapišimo v obliki $r(x) = \frac{x^2+x}{x^2-4} = \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+2)} = 1 + \frac{x+4}{x^2-4}$. Iz zapisa ugotovimo

- Ker je števec racionalne funkcije enak $x(x+1)$, sta $x = 0$ in $x = -1$ ničli (prve stopnje) polinoma v števcu in zato tudi **ničli racionalne funkcije**.
- Ker je imenovalec racionalne funkcije enak $(x-2)(x+2)$, sta ničli imenovalca enaki $x = -2$ in $x = 2$. Pri ničlah polinoma v imenovalcu dobimo deljenje z nič, kar pomeni, da tu racionalna funkcija ni definirana. Ker v bližini ničle imenovalca vrednost racionalne funkcije narašča preko vseh meja, rečemo, da so ničle polinoma v imenovalcu **poli racionalne funkcije**.
- Za po absolutni vrednosti zelo velike x-e je $x + 4$ približno enako x in $x^2 - 4$ približno enako x^2 in zato $\frac{x+4}{x^2-4} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \sim 0$. Torej je za po absolutni vrednosti zelo velike x racionalna funkcija približno enaka 1. Funkcijo (to je polinom) kateri se racionalna funkcija približuje za po absolutni vrednosti velike x-e imenujemo **asimptota racionalne funkcije**. V našem primeru je asimptota $y = 1$.

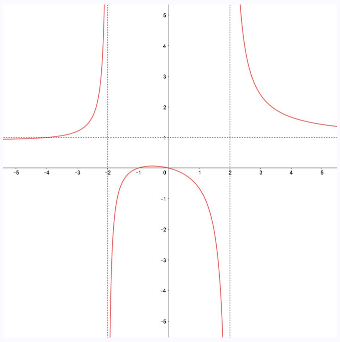
Primer - nadaljevanje

Ker velja

- Podobno kot polinom tudi racionalna funkcija v ničlah lihe stopnje zamenja predznak, v ničlah sode stopnje pa ne, saj se x-osi le dotakne.
- Racionalna funkcija se v polih stopnje k obnaša podobno kot funkcija $\frac{1}{x^k}$. Torej zamenja predznak za lihe stopnje in ohranja predznak za sode stopnje.
- Za po absolutni vrednosti zelo velike x-e se racionalna funkcija približuje asimptoti.
- Ko izračunamo vrednost racionalne funkcije za katero izmed vrednosti, ki ni niti ničla niti pol, v našem primeru na primer $r(1) = -\frac{2}{3}$, bomo s premislekom in v našem primeru upoštevanjem

$$\begin{aligned} \text{Ničle:} \quad & 0, -1 \\ \text{Poli:} \quad & -2, 2 \\ \text{Asimptota:} \quad & y = 1 \end{aligned}$$

  že lahko narisali graf.



- Opazimo še, da za $x = -4$ velja $r(x) = 1$. V tej točki (pri x-u za katerega je ostanek pri deljenju števca z imenovalcem enak 0) racionalna funkcija seka asimptoto.