Racionalne funkcije - povzetek

Racionalna funkcija je funkcija oblike

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kjer sta $p(x)$ in $q(x)$ polinoma. Da bi racionalno funkcijo razumeli in znali narisati njen graf

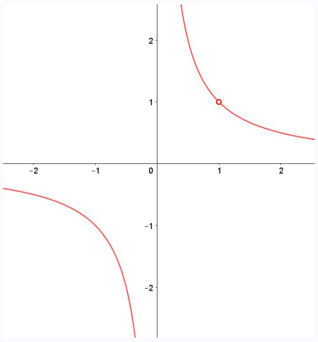
- najprej določimo ničle števca in ničle imenovalca.
- Definicijsko območje racionalne funkcije so vsa realna števila razen ničel imenovalca: $\mathcal{D}_r = \mathbb{R} \setminus \{\text{ničle imenovalca}\}$.
- Ničle števca skupaj s stopnjami določajo **ničle racionalne funkcije**.
- Ničle imenovalca skupaj s stopnjami določajo **pole racionalne funkcije**.
- Po deljenju $p(x)$ s $q(x)$ zapišemo $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = a(x) + \frac{o(x)}{q(x)}$, pri čemer je stopnja $o(x)$ manjša od stopnje $q(x)$. Polinom $a(x)$ (lahko je $a(x) \equiv 0$) je **asimptota racionalne funkcije**. Za zelo velike in za zelo majhne x se $r(x)$ približuje vrednosti $a(x)$. Funkcija lahko asimptoto tudi seka. To se zgodi v točkah, kjer je $o(x) = 0$.

‘Ne-okrajšane’ racionalne funkcije

Doslej smo obravnavali ‘okrajšane’ racionalne funkcije. To pomeni, da so ničle različne od polov. Lahko se pa zgodi, da bi pri računanju dobili, da je ista vrednost hkrati ničla in hkrati pol racionalne funkcije. To pomeni, da je racionalna funkcija napisana v **ne-okrajšani obliki**, oziroma, da imata števec in imenovalec kak skupen faktor. Za zgled vzemimo funkciji $r(x) = \frac{x}{x^2}$ in $q(x) = \frac{x-1}{x^2-x}$. Če ulomka formalno pokrajšamo, dobimo $r(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$ in $q(x) = \frac{x-1}{x^2-x} = \frac{1}{x}$. A spomnimo se, da z 0 ne smemo deliti. Mi pa smo delili z 0 v prvem primeru, ko je $x = 0$ in v drugem primeru, ko je $x = 1$. Torej smo funkciji $r(x)$ in $q(x)$ po krajšanju napisali površno. Pravilen zapis bi bil

$$r(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{za } x \neq 0 \\ \text{nedefinirano}, & \text{za } x = 0 \end{cases} \quad \text{in} \quad q(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{za } x \neq 1 \\ \text{nedefinirano}, & \text{za } x = 1 \end{cases}$$

Ker je prva funkcija pri $x = 0$ tudi sicer nedefinirana, je dejansko $r(x) = \frac{1}{x}$, medtem ko je $q(x) = \frac{1}{x}$ le za $x \neq 1$, pri $x = 1$ pa $q(x)$ ni definirana, saj če v originalno funkcijo $q(x)$ vstavimo $x = 1$ dobimo ‘0 deljeno z 0’. Graf racionalne funkcije $q(x)$ narišemo tako, da s ‘krogcem’ (kot na sliki) ali puščicami označimo, da v dani točki funkcija ni definirana.



Eksponentna funkcija

Eksponentna funkcija je vsaka funkcija oblike $f(x) = a^x$, $a > 0$. Za razliko od potenčne funkcije je pri eksponentni funkciji spremenljivka x v eksponentu.

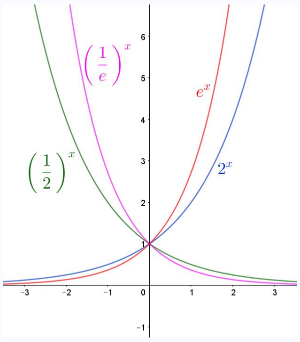
Ponovimo:

Eksponentna funkcija: $f(x) = a^x$ **Potenčna funkcija**: $f(x) = x^a$

Pogoj, da je osnova pozitivna ($a > 0$) je potreben zaradi definiranosti funkcije. Neodvisna spremenljivka x v eksponentu namreč zavzame poljubne vrednosti $x \in \mathbb{R}$. Če bi veljalo $a < 0$, bi bila to zelo čudna funkcija, ki pri mnogih x-ih (npr. pri $x = \frac{1}{2k}$ za $k \in \mathbb{Z}$) sploh ne bi bila definirana.

Eksponentna funkcija $f(x) = a^x$, $a > 0$ ima lastnosti:

- definirana je na celi realni osi, torej $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$;
- zaloga vrednosti so vsa pozitivna realna števila, torej $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$;



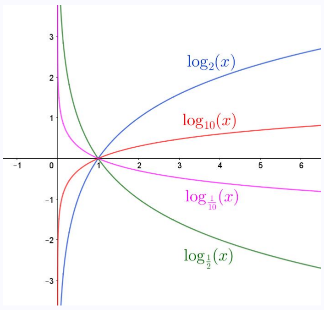
- gre skozi točki $(0, 1)$ in $(1, a)$;
- je injektivna za vsak $a \neq 1$;
- za $a > 1$ je strogo naraščajoča na celem $\mathcal{D}_f$;
- za $a < 1$ je strogo padajoča na celem $\mathcal{D}_f$;
- za $a = 1$ je konstantna funkcija $f(x) = 1^x \equiv 1$;
- ena najpogosteje uporabljenih eksponentnih funkcij je $f(x) = e^x$, za $e = 2.71828...$.

Logaritemska funkcija

Eksponentna funkcija $f(x) = a^x$, $a > 0$ in $a \neq 1$ je injektivna, zato obstaja njen inverz $f^{-1}(x)$. Inverzno funkcijo eksponentne funkcije imenujemo **logaritemska funkcija** in jo označimo $f^{-1}(x) = \log_a(x)$. Pri tem seveda velja $a > 0$ in $a \neq 1$. Številu a rečemo **osnova** logaritma.

Iz lastnosti eksponentne funkcije sledi, da za logaritemsko funkcijo $f(x) = \log_a(x)$ veljajo **lastnosti**:

- gre skozi točki $(1, 0)$ in $(a, 1)$;
- definirana je za vsa pozitivna realna števila, torej $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$;



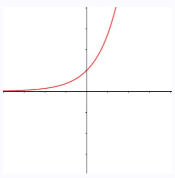
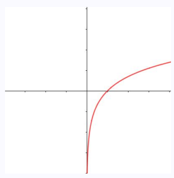
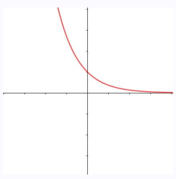
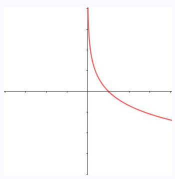
- zaloga vrednosti so vsa realna števila, torej $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$;
- $x = a^y \iff \log_a x = y$ (enačbi sta ekvivalentni);
- je injektivna in surjektivna (bijektivna iz $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$);
- za $a > 1$ je strogo naraščajoča na celem $\mathcal{D}_f$;
- za $a < 1$ je strogo padajoča na celem $\mathcal{D}_f$;

Logaritemska funkcija - dodatne lastnosti

- $\log_a 1 = 0$ . . . . ker $a^0 = 1$.
- $\log_a a = 1$ . . . . ker $a^1 = a$.
- $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ . . . . ker $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
- $\log_a x^r = r \log_a x$.
  - **Opozorilo**: iz razumevanja definicijskega območja sledi, da sta tako x^r kot x pozitivna. Tako ni odveč opozoriti, da velja npr. $\log_a x^2 = 2\log_a |x|$.
- $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.
  - **Komentar**: Tej formuli rečemo tudi **prehod na novo osnovo**. Opazimo, da je $\frac{1}{\log_b a}$ konstanta. Tako smo logaritem z osnovo a zapisali kot logaritem z osnovo b in ga pomnožili s konstanto $\frac{1}{\log_b a}$:

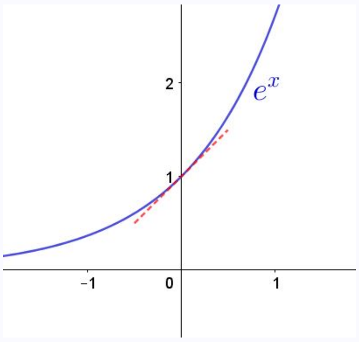
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} \cdot \log_b x$$

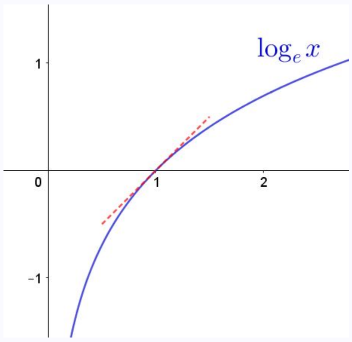
Eksponentna in logaritemska funkcija - primerjava

	a^x	$\log_a x$
definicijsko območje	$\mathbb{R}$	$(0, \infty)$
zaloga vrednosti	$(0, \infty)$	$\mathbb{R}$
$1 < a$	narašča 	narašča 
$0 < a < 1$	pada 	pada 

Najpogosteje uporabljene osnove eksponentne in logaritemske funkcije

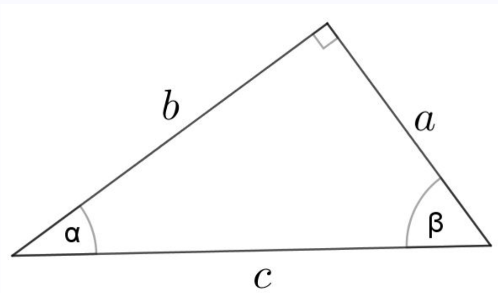
- Najpogosteje uporabljeni osnovi sta $e = 2,71828...$ in 10. Uporablja se pa tudi druge, kot na primer 2.
- Pogosto uporabljamo oznake: $\log x = \log_{10} x$ in $\ln x = \log_e x$.
- Zakaj je $e = 2,71828...$ tako posebna osnova? Eksponentna funkcija e^x in logaritemska funkcija $\log_e x$ sta edini funkciji, ki imata v točki $(0,1)$ oziroma v točki $(1,0)$ strmino enako 1. To je zelo pomembno pri analizi funkcij (pri odvodu).





Dinamična vizualizacija: https://ggbm.at/djumf6d5 V https://www.geogebra.org/m/veaekmg5

Kotne funkcije



V pravokotnem trikotniku so vsa razmerja stranic odvisna le od enega izmed kotov. Zato lahko v pravokotnem trikotniku definiramo funkcije

$$\sin(\text{kot}) = \frac{\text{‘nasprotna kateta’}}{\text{‘hipotenuza’}}$$

$$\cos(\text{kot}) = \frac{\text{‘priležna kateta’}}{\text{‘hipotenuza’}}$$

$$\tan(\text{kot}) = \frac{\text{‘nasprotna kateta’}}{\text{‘priležna kateta’}} \qquad \cot(\text{kot}) = \frac{\text{‘priležna kateta’}}{\text{‘nasprotna kateta’}}$$

Funkcije imenujemo zaporedoma ‘sinus’, ‘kosinus’, ‘tangens’ in ‘kotangens’. To so **kotne funkcije**. Argument (neodvisno spremelnjivko) kotnih funkcij običajno označujemo z x ali z grškimi črkami $\alpha, \beta, \ldots$, da ponazorimo kateri kot obravnavamo. V našem primeru glede na sliko torej velja:

$$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}, \quad \cos(\alpha) = \frac{b}{c}, \quad \tan(\alpha) = \frac{a}{b}, \quad \cot(\alpha) = \frac{b}{a}$$

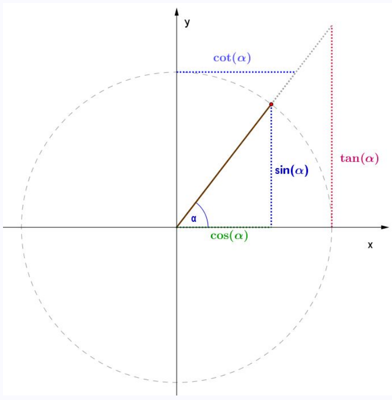
$$\sin(\beta) = \frac{b}{c}, \quad \cos(\beta) = \frac{a}{c}, \quad \tan(\beta) = \frac{b}{a}, \quad \cot(\beta) = \frac{a}{b}$$

Včasih se uporabljajo tudi alternativne oznake $\tan(x) = \mathrm{tg}(x)$ in $\cot(x) = \mathrm{ctg}(x)$.

Velja tudi $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, $\tan(x) = \frac{1}{\cot(x)}$ in $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$.

Kotne funkcije na enotski krožnici

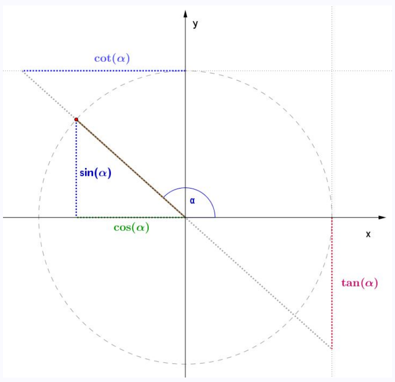
Razmislimo, da so prej definirane kotne funkcije določene s pomočjo pravokotnega trikotnika. Torej vemo le kolikšne so kotne funkcije za kote ki so večji od 0 in manjši od 90^o.



Če v koordinatni sistem narišemo krožnico s središčem v izhodišču in radijem 1 (**enotsko krožnico**), ter opazujemo, kje krožnico seka poltrak iz izhodišča, ki ga določa kot α glede na *x*-os, opazimo 'pravokotne trikotnike', v katerih lahko opazujemo vrednosti kotnih funkcij.

Ker je radij krožnice 1, lahko razmislimo, da vrednosti kotnih funkcij dobijo nazorni geometrijski pomen, ki je nakazan na sliki.

Kotne funkcije za kote večje od 90^o

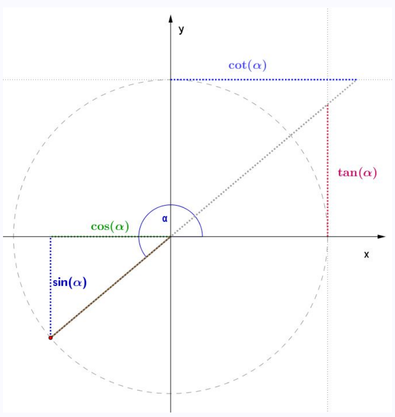


Razmislek o kotnih funkcijah v enotski krožnici omogoča nazorno definicijo kotnih funkcij tudi za kote, ki so večji od 90^o.

Bodimo pa pozorni na predznake vrednosti kotnih funkcij glede na koordinatni sistem. Za kote večje od 90^o in manjše od 180^o, je (opazujmo sliko) sinus pozitiven, kosinus negativen, tangens negativen in kotangens negativen.

Opazimo, kako se 'razbereta' tangens in kotangens na premicah $x = 1$ in $y = 1$.

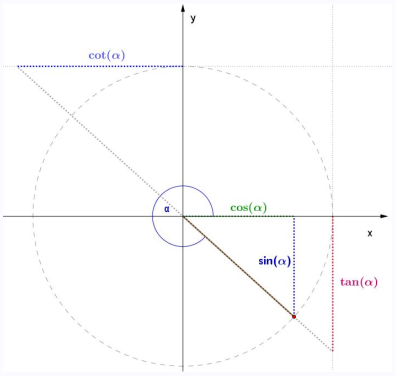
Kotne funkcije za kote večje od 180^o in manjše od 270^o



Za kote večje od 180^o in manjše od 270^o, je (opazujmo sliko) sinus negativen, kosinus negativen, tangens pozitiven in kotangens pozitiven.

Opazimo, kako se 'razbereta' tangens in kotangens na premicah $x = 1$ in $y = 1$.

Kotne funkcije za kote večje od 270^o in manjše od 360^o



Za kote večje od 270^o in manjše od 360^o, je (opazujmo sliko) sinus negativen, kosinus pozitiven, tangens negativen in kotangens negativen.

Opazimo, kako se 'razbereta' tangens in kotangens na premicah $x = 1$ in $y = 1$.

Razmislimo, kakšne vrednosti kotnih funkcij bi dobili za negativi kot $-\alpha$? Dobili bi iste vrednosti kot za kot $360^o - \alpha$.

Z razumevanjem **kotnih funkcij na enotski krožnici** je mogoče razložiti mnoge njihove lastnosti.

Opazujmo in raziskujmo z dinamično vizualizacijo https://www.geogebra.org/m/gvbew3cy v https://www.geogebra.org/m/veaekmg5.

Stopinje in radiani

Kako merimo kote?

Kote običjano merimo v 'stopinjah' ali 'radianih'. Merjenje v 'radianih' je za nekatere namene veliko ugodnejše od merjenja v 'stopinjah'.

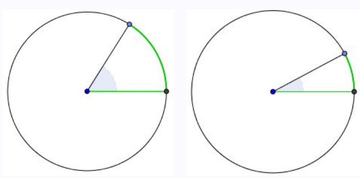
Osnovna povezava med 'stopinjami' ali 'radiani' je, da polni kot meri 360 'stopinj', oziroma 2π 'radianov'. Torej velja

$$360^o = 2\pi^{rd} \text{ oziroma } 180^o = \pi^{rd}$$

- Koliko 'stopinj' je na primer $\frac{2}{3}^{rd}$ in koliko 'radianov' je na primer 60^o?

$$\frac{2}{3}^{rd} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^o = \left(\frac{120}{\pi}\right)^o \qquad 60^o = \left(60 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^{rd} = \left(\frac{\pi}{3}\right)^{rd}$$

- 'Radiani' merijo kote z razmerjem med dolžino loka in radijem kroga.
- Kot 1^{rd} je kot pri katerem je lok enako dolg kot radij. Kot 0.5^{rd} je kot pri katerem je lok dolg polovico radija.



- V nadaljevanju bomo pretežno uporabljali 'radiane', včasih pa tudi 'stopinje'.
- Dinamična vizualizacija: https://ggbm.at/xpeqtstp v https://www.geogebra.org/m/veaekmg5

Periodičnost

Iz razumevanja kotnih funkcij na enotski krožnici je očitno, da se vrednosti vseh kotnih funkcij ponovijo, če kot povečamo za 'polni kot'. Rečemo tudi, da se vrednosti kotnih funkcij ponovijo s **periodo** 2π, oziroma 360^o.

- Funkciji $\sin x$ in $\cos x$ sta periodični s periodo 2π ozirmoma 360^o.
  - $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
  - $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- Funkciji $\tan x$ in $\cot x$ sta periodični s periodo π ozirmoma 180^o.
  - $\tan(x + \pi) = \tan(x)$
  - $\cot(x + \pi) = \cot(x)$

Nekatere druge lastnosti kotnih funkcij

Med kotnimi funkcijami veljajo številne zveze. Na primer iz razumevanja kotnih funkcij na enotski krožnici hitro sledi:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
- $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\pi - x) = -\cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$

Z nekaj računanja, pa je mogoče dobiti tudi številne druge enakosti, kot na primer:

- $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

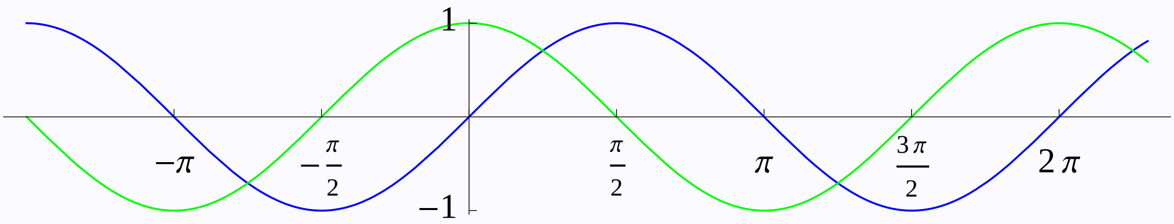
Definicijska območja in zaloge vrednosti

Z razumevanjem kotnih funkcij na enotski krožnici lahko hitro določimo tudi njihova definicijska območja in zaloge vrednosti.

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
$\mathcal{D}_f$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$\mathbb{R} - \{k\pi\}$
$\mathcal{Z}_f$	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

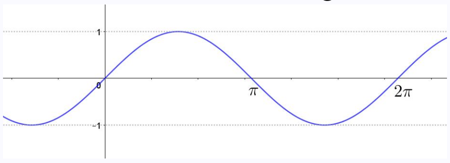
Grafa sinusa in kosinusa

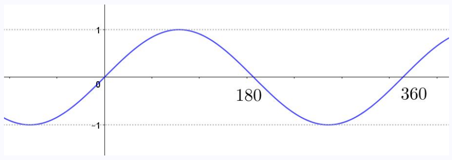
Z razumevanjem vrednosti funkcij $f(x) = \sin(x)$ in $g(x) = \cos(x)$ na enotski krožnici narišemo grafa (modro: sinus in zeleno: kosinus).



- Dinamična vizualizacija: https://ggbm.at/cynexdyr , https://ggbm.at/aqdw2cmx in https://ggbm.at/bwrbzm3y v https://www.geogebra.org/m/veaekmg5

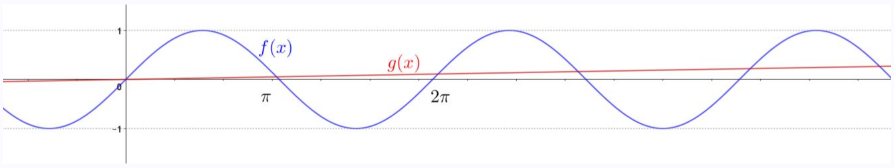
Opozorilo: Graf na primer funkcije $\sin x$ pogosto rišemo tako, da nismo posebej pozorni na enote. To je, včasih rečemo, da ima funkcija ničlo pri π in včasih, da ima ničlo pri 180^o ter narišemo enega izmed grafov





Ko govorimo o splošnih lastnostih in obliki funkcije to res ni potrebno, sicer sta pa to bistveno drugačna grafa oziroma funkciji. Pravilen je dejansko samo prvi izmed zgornjih grafov, pri drugem smo pa x-os 'močno skrčili', namreč enoti sta enako dolgi le na prvem izmed zgornjih grafov, kjer $\pi \simeq 3.14$ dejansko ustreza 3-em enotam.

V koordinatnem sistemu, ki ima enako dolgo enoto na x in na y osi sta funkciji sinusa, kjer je argument v radianih oziroma stopinjah bistveno drugačni. Če označimo $f(x) = \sin(x^{rd})$ in $g(x) = \sin(x^o)$ bosta v istem koordinatnem sistemu funkciji izgledali bistveno drugačni.



Seveda, funkcija $g(x)$ je veliko bolj 'raztegnjena'. Maksimum, to je vrednost 1 doseže šele pri $x = 90$ in ne pri $x = \frac{\pi}{2} \simeq 1.57$ kot $f(x)$.