Predavanja 6

Sistemi nelinearnih enačb

Šesti sklop izročkov

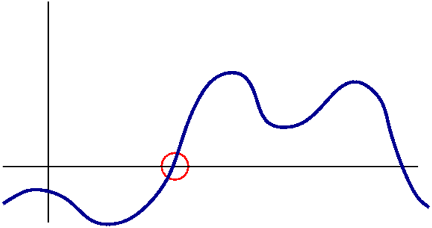
Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

15. november 2021

Motivacija

- Vsi problemi niso teoretični niso tako enostavno rešljivi kot sistemi linearnih enačb.
- Ničel polinoma stopnje 5 ne moremo zapisati analitično.
- Kako reševati take probleme? S ponavljanjem določenega postopka (iteracijo) upamo, da se rešitvam čim bolj približamo.

Naj bo dana funkcija $f(x)$. Poišči x, ki zadošča $f(x) = 0$

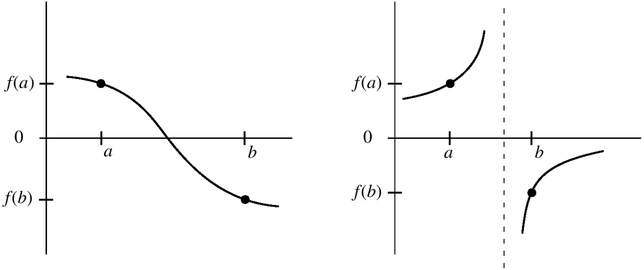


Osnovna strategija reševanja:

1. Skiciraj funkcijo.
   - Postavimo začetno domnevo, kaj je lahko ničla.
   - Določimo, kje bo težko najti ničle.
2. Začnemo z začetno domenovo in uporabimo nek iteracijski algoritem

Omejitev intervala za iskanje ničle

- Ničla x je omejena na $[a, b]$, če imata $f(a)$ in $f(b)$ različna predznaka.
- Sprememba predznaka funkcije ne pomeni, da je na tem intervalu ničle, kajti lahko imamo na intervalu singularnost:



- Interval, kjer funkcija spremeni predznak, pa nam lahko vseeno služi kot začetna domneva.

Konvergenčni kriteriji za x

Zaustavitveni kriterij je odvisen od narave problema, ki ga rešujemo:

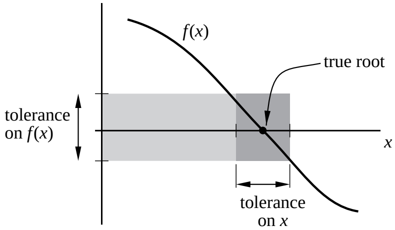
- Lahko nas zanima razdalja, kdaj velja

$$|x_k - x_{k-1}| < \delta_x.$$

- Lahko pa nas zanima, kdaj velja

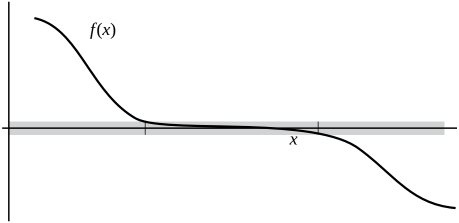
$$|f(x_k)| < \delta_f.$$

-

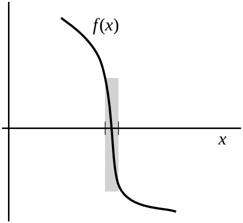


Primerjava obeh konvergenčnih kriterijev

Če je $f'(x)$ majhen v okolici ničle, je lažje zadostiti toleranci na funkcijsko vrednost.



Če je $f'(x)$ velik v bližini ničle, je možno zadostiti toleranci na dolžino intervala, četudi je $|f(x)|$ še vedno velik.



Povezava med obema kriterijama

- Kako sta kriterija na x in $f(x)$ povezana med sabo?
- Ko x_a in x_b konvergirata proti x^*, gre razmerje

$$\frac{f(x_b) - f(x_a)}{x_b - x_a}$$

  proti $f'(x^*)$.
- Zato lahko pričakujemo, da velja

$$|f(x_b) - f(x_a)| \approx |f'(x^*)||x_b - x_a|,$$

  ko x_a in x_b konvergirata proti x^*.

Iskanje ničle

Recimo, da smo določili interval, kjer naj bi ležala ničla.

Sedaj jo moramo poiskati.

Metode:

- bisekcija,
- Newtonova oz. tangentna metoda,
- sekantna metoda,
- metoda regula falsi,
- metode fiksne točke.

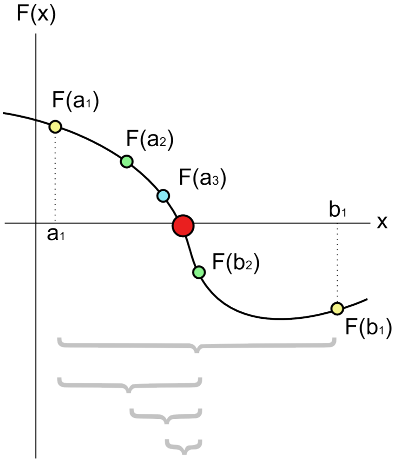
Bisekcija

Razpolovišče začetnega intervala $[a, b]$ je točka

$$x_m = \frac{1}{2}(a + b).$$

Postopek:

1. Poišči razpolovišče.
2. Izmed dveh možnih intervalov izberi tistega, kjer ima funkcija različno predznačeni krajišči.
3. Nadaljujemo s prvim korakom.
4. Ustavimo se, ko je interval krajši od naprej predpisane tolerance.



```
zacetni podatki: f, a, b, tol
for k = 1, 2, ...
   x_m = a + (b - a)/2
   if sign(f(x_m)) = sign(f(a))
      a = x_m
   else
      b = x_m
   end
   if |b-a|<tol, stop
end
```

Naj bo δ_n velikost intervala po n-tem koraku bisekcije. Potem velja

$$\delta_0 = b - a, \quad \delta_1 = \frac{1}{2}\delta_0, \quad \delta_2 = \frac{1}{2}\delta_1 = \frac{1}{4}\delta_0, \quad \dots, \quad \delta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \delta_0$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\delta_n}{\delta_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2^{-n} \qquad \text{ali} \qquad n = \log_2\left(\frac{\delta_n}{\delta_0}\right)$$

n	$\frac{\delta_n}{\delta_0}$	število izračunov funkcijskih vrednosti
5	3.1×10^{-2}	7
10	9.8×10^{-4}	12
20	9.5×10^{-7}	22
30	9.3×10^{-10}	32
40	9.1×10^{-13}	42
50	8.9×10^{-16}	52

Algoritem in primeri:

https://zalara.github.io/bisekcija.m

https://zalara.github.io/testbisekcija.m

https://zalara.github.io/testbisekcija2.m

Hitrost konvergence

- Naj bo $e_n = x^* - x_n$ napaka.
- V splošnem pravimo, da zaporedje konvergira z redom r, če je

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^r} = C, \quad \text{kjer je } C \text{ konstanta.}$$

Posebni primeri:

- Če je $r = 1$ in $C = 1$, potem je red sublinearen.
- Če je $r = 1$ in $C < 1$, potem je red linearen.
- Če je $1 < r < 2$, potem je red superlinearen.
- Če je $r = 2$ in $C > 0$, potem je red kvadratičen.
- Če je $r = 3$ in $C > 0$, potem je red kubičen.

Linearen red konvergence na vsakem koraku doda eno točno mesto.

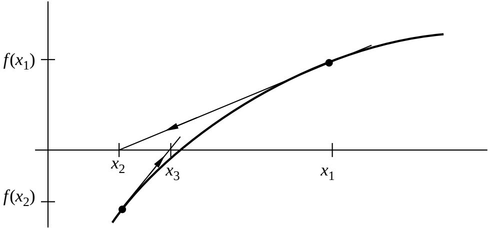
Kvadratičen red konvergence na vsakem koraku podvoji število točnih mest.

Newtonova oz. tangentna metoda

Iteracija:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.} \qquad (1)$$

Izpeljava:



Pri trenutnem približku x_k uporabimo funkcijsko vrednost $f(x_k)$ in odvod $f'(x_k)$, da izračunamo naslednji približek. Enačba tangente na krivuljo v točki $(x_k, f(x_k))$ je

$$y = f(x_k) + (x - x_k)\, f'(x_k).$$

Ker je cilj najti x, tako da je $f(x) = 0$,

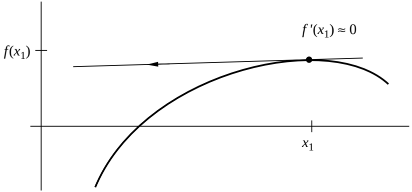
$$0 = f(x_k) + (x_{k+1} - x_k)\, f'(x_k)$$

in izrazimo x_{k+1}.

```
zacetni podatki:  x_1
for k = 2,3,...
  x_k = x_{k-1} - f(x_{k-1})/f'(x_{k-1})
  if x_k znotraj tolerance, stop
end
```

Lastnosti tangentne metode :

- Konvergira precej hitreje kot bisekcija - red konvergence je vsaj 2 (izpeljava sledi).
- Zahteva analitično formulo za $f'(x)$ - če tega ne poznamo, lahko uporabimo sekantno metodo (sledi).
- Je enostavna, če je $f'(x)$ moč izračunati.
- Ni nujno, da približki ostanejo znotraj začetnega intervala:



Iz (1) sledi, da bo nov približek daleč vstran od prejšnjega približka, če je $f'(x_k) \approx 0$.

Hitrost konvergence Newtonove metode

Newotonova metoda ima hitrost konvergence reda 2 (kvadratična konvergenca) vedno, ko velja $f'(x_*) \neq 0$. Za ξ med x_k in x_* velja (sledi iz lastnosti Taylorjeve vrste)

$$f(x_*) = f(x_k) + (x_* - x_k)f'(x_k) + \frac{1}{2}(x_* - x_k)^2 f''(\xi) = 0.$$

Torej je

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + x_* - x_k + (x_* - x_k)^2 \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} = 0.$$

Sledi

$$x_* - x_{k+1} + (x_* - x_k)^2 \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)} = 0.$$

Zato

$$\frac{|x_* - x_{k+1}|}{|x_* - x_k|^2} = \frac{f''(\xi)}{f'(x_k)}.$$

Torej je konvergenca kvadratična.

Algoritem in primeri:

`https://zalara.github.io/tangentna.m`

`https://zalara.github.io/testtangentna.m`

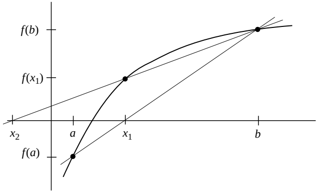
`https://zalara.github.io/testtangentna2.m`

Sekantna metoda

Iteracija:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - f(x_k)\left[\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\right]} \qquad (2)$$

Izpeljava:



S pomočjo dveh zaporednih približkov x_{k-1} in x_k, za nov približek vzamemo x-koordinato presečišča sekatne skozi točki $(x_k, f(x_k))$ in $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ z abscisno osjo.
Naj bosta dana

$$x_k = \text{trenutni približek za ničlo}, \quad x_{k-1} = \text{prejšnji približek za ničlo}.$$

Aproksimiramo prvi odvod z naklonom sekante skozi točki $(x_k, f(x_k))$ in $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Vstavimo to aproksimacijo v (1) in dobimo (2).

```
zacetni podatki:  x_1 = ..., x_2 = ...
for k = 2,3 ...
  x_{k+1} = x_k - f(x_k)(x_k - x_{k-1})/(f(x_k) - f(x_{k-1}))
  if je izpolnjen tolerancni pogoj, stop
end
```

Algoritem in primeri:

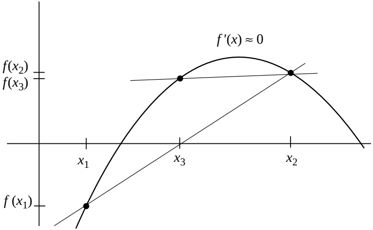
https://zalara.github.io/sekantna.m

https://zalara.github.io/testsekantna.m

https://zalara.github.io/testsekantna2.m

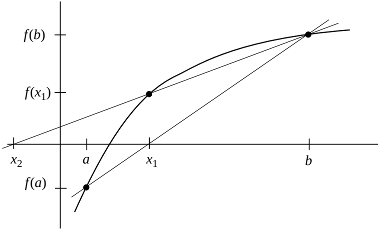
Lastnosti sekantne metode:

- Konvergenca je podobna tisti pri tangentni metodi, tj. $r \approx 1.62$ (izpeljavo izpustimo).
- Ni potrebno računati odvoda $f'(x)$.
- Algoritem je enostaven.
- Potrebujemo dva zaporedna približka.
- Naslednji približek ne ostane nujno znotraj začetnega intervala:



Iz (2) sledi, da bo nov približek, x_{k+1}, daleč vstran od prejšnjega, če bo $f(x_k) \approx f(x_{k-1})$.

Metoda regula falsi



Metoda regula falsi je hibrid bisekcije in sekantne metode. Na vsakem koraku namreč izračunamo s pomočjo dveh zaporednih približkov a in b nov približek kot x-koordinato presečišča sekatne skozi točki $(a, f(a))$ in $(b, f(b))$ z abscisno osjo, potem pa za nova približka a, b vzamemo interval, kjer je funkcija različno predznačena.

```
zacetni podatki:  a, b
for k = 2, 3 ...
  c = b - f(b)(b - a)/(f(b) - f(a))
  if f(a)f(c) < 0
      b = c
  else
      a = c
  if je izpolnjen tolerancni pogoj, stop
end
```

Metoda regula falsi

Algoritem in primeri:

`https://zalara.github.io/regulafalsi.m`

`https://zalara.github.io/testregulafalsi.m`

`https://zalara.github.io/testregulafalsi2.m`

Metode fiksne točke

Metodo fiksne točke dobimo tako, da enačbo

$$f(x) = 0$$

preoblikujemo v ekvivalentno enačbo

$$g(x) = x.$$

Točki x pravimo negibna točka funkcije g.

Tangentna metoda je poseben primer metode fiksne točke.

Izrek

Naj bo g zvezno odvedljiva na intervalu $I = [a, b]$ in naj velja $g(I) \subseteq I$. Naj bo še $\sup_{x \in I} |g'(x)| = m < 1$. Velja:

- *$g(x) = x$ ima enolično rešitev ξ na I.*
- *Za vsak $x_0 \in I$ zaporedje $x_n = g(x_{n-1})$ konvergira proti ξ, pri čemer je*

$$|x_{n+1} - \xi| \leqslant \frac{m^{n+1}}{1-m} |x_1 - x_0|$$

Metoda fiksne točke - primeri

Algoritem in primeri:

https://zalara.github.io/iteracija.m

https://zalara.github.io/testiteracija.m

https://zalara.github.io/testiteracija2.m

https://zalara.github.io/testiteracija3.m

https://zalara.github.io/testiteracija4.m