

# Diskretne strukture

## Sedmi sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko  
Univerza v Ljubljani

19. november 2021

- Naj bo  $A$  končna množica. Potem  $|A|$  označuje *število elementov* ali *moč* množice  $A$ .

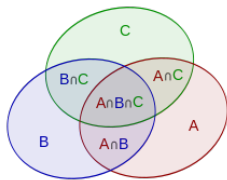
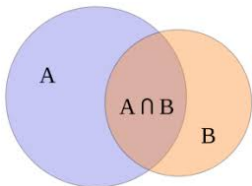
**Primeri.**  $|\emptyset| = 0$ ,  $|\{0, 1\}| = 2$ ,  $|\{\{0, 1\}\}| = 1$ .

- Če za končni množici  $A$  in  $B$  velja  $|A| = |B|$ , pravimo, da sta  $A$  in  $B$  *enako močni*. Pišemo:  $A \sim B$ .

## Trditev

Naj bodo  $A, B, C$  končne množice.

- 1  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- 2  $|\mathcal{P}A| = 2^{|A|}$
- 3  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- 4  $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$



# Načelo vključitev in izključitev

Naj bo  $A$  neka množica in  $A_1, A_2, A_3, A_4$  njene podmnožice. Potem velja:

$$\begin{aligned} & |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = \\ & = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ & - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|. \end{aligned}$$

## Izrek (Načelo vključitev in izključitev)

Naj bo  $A$  končna množica in  $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq A$ . Vpeljemo oznako

$$A_{i_1, i_2, \dots, i_k} := A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}.$$

Potem je

$$\begin{aligned} & |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \underbrace{|A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|}_{\text{vsota moči vseh množic } A_i} \\ & - \underbrace{(|A_{1,2}| + |A_{1,3}| + \dots + |A_{n-1,n}|)}_{\text{vsota moči vseh množic } A_{i,j}} + \underbrace{(|A_{1,2,3}| + |A_{1,2,4}| + \dots + |A_{n-2,n-1,n}|)}_{\text{vsota moči vseh množic } A_{i,j,k}} \\ & - \underbrace{(|A_{1,2,3,4}| + |A_{1,2,3,5}| + \dots + |A_{n-3,n-2,n-1,n}|)}_{\text{vsota moči vseh množic } A_{i,j,k,\ell}} + \dots + (-1)^{n+1} |A_{1,2,3,\dots,n}|. \end{aligned}$$

## Primer

*Koliko je števil na celoštevilskem intervalu  $[1 \dots 96]$ , ki so deljiva s 6 in niso deljiva niti s 24 niti z 32.*

**Rešitvi.** Definirajmo univerzalno množico  $S = \{1, 2, \dots, 96\}$ .

$A := \{x \in S : x \text{ je deljiv s } 6\}$ ,  $B := \{x \in S : x \text{ ni deljiv s } 24\}$ ,  $C := \{x \in S : x \text{ ni deljiv z } 32\}$ .

Zanima nas  $|A \cap B \cap C|$ . Velja

$$A \cap B \cap C = S \setminus (A \cap B \cap C)^c = S \setminus (A^c \cup B^c \cup C^c).$$

Velja

$$|A^c \cup B^c \cup C^c| = |A^c| + |B^c| + |C^c| - |A^c \cap B^c| - |A^c \cap C^c| - |B^c \cap C^c| + |A^c \cap B^c \cap C^c|.$$

Premislimo

$$A^c = \{x \in S : x \text{ ni deljiv s } 6\} \Rightarrow |A^c| = 96 - \frac{96}{6} = 96 - 16 = 80,$$

$$B^c = \{x \in S : x \text{ je deljiv s } 24\} \Rightarrow |B^c| = \frac{96}{24} = 4,$$

$$C^c = \{x \in S : x \text{ je deljiv z } 32\} \Rightarrow |C^c| = \frac{96}{32} = 3,$$

$$A^c \cap B^c = \{x \in S : x \text{ ni deljiv s } 6 \text{ in je deljiv s } 24\} = \emptyset \Rightarrow |A^c \cap B^c| = 0,$$

$$A^c \cap C^c = \{x \in S : x \text{ ni deljiv s } 6 \text{ in je deljiv z } 32\} = \{32, 64\} \Rightarrow |A^c \cap C^c| = 2,$$

$$B^c \cap C^c = \{x \in S : x \text{ je deljiv s } 24 \text{ in je deljiv z } 32\} = \{96\}, \Rightarrow |B^c \cap C^c| = 1,$$

$$A^c \cap B^c \cap C^c \subseteq A^c \cap B^c = \emptyset \Rightarrow A^c \cap B^c \cap C^c = \emptyset \Rightarrow |A^c \cap B^c \cap C^c| = 0.$$

Sledi

$$|A^c \cup B^c \cup C^c| = 80 + 4 + 3 - 2 - 1 = 84 \Rightarrow |A \cap B \cap C| = 96 - 84 = 12.$$

## Primer

Zaposleni v nekem podjetju programirajo v treh jezikih: Java, C in C++. V vsakem jeziku programira tri petine programerjev, v C in C++ dve petini, v C-ju in Javi tri desetine ter v jezikih Java in C++ ena petina. V vseh treh jezikih programira 10 programerjev.

Koliko programerjev je zaposlenih v podjetju?

Koliko jih programira v natanko dveh jezikih?

**Rešitvi.** Definirajmo univerzalno množico  $S$  vseh zaposlenih programerjev v podjetju.

$$A := \{x \in S : x \text{ programira v Javi.}\}, \quad B := \{x \in S : x \text{ programira v C.}\},$$

$$C := \{x \in S : x \text{ programira v C++}\}.$$

Zanima nas

- $|A \cup B \cup C|$ .
- $|A \cap B \cap C^c| + |A \cap B^c \cap C| + |A^c \cap B \cap C|$ .

Naj bo  $N := |S|$ . Vemo še:

- $|A| = |B| = |C| = \frac{3}{5}N$ .
- $|B \cap C| = \frac{2}{5}N$ ,  $|A \cap B| = \frac{3}{10}N$ ,  $|A \cap C| = \frac{1}{5}N$ .
- $|A \cap B \cap C| = 10$ .

Velja

$$\begin{aligned} N = |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \\ &= \frac{9}{5}N - \frac{3}{10}N - \frac{2}{5}N - \frac{1}{5}N + 10. \end{aligned}$$

Sledi  $\frac{1}{10}N = 10$  oz.  $N = 100$ .

Velja še

$$\begin{aligned} |A \cap B \cap C^c| + |A \cap B^c \cap C| + |A^c \cap B \cap C| &= |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - 3|A \cap B \cap C| \\ &= (2/5 + 3/10 + 1/5)N - 30 = 60. \end{aligned}$$

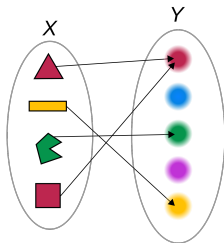
Naj bosta  $X$ ,  $Y$  množici in  $\mathcal{D}_f \subseteq X$  podmnožica. Predpis  $f : \mathcal{D}_f \rightarrow Y$  je **preslikava** iz  $\mathcal{D}_f$  v  $Y$ , če je za vsak element  $x \in \mathcal{D}_f$ ,  $f(x)$  nek točno določen element iz  $Y$ .

Množici  $\mathcal{D}_f$  pravimo **definicijsko območje** preslikave  $f$ .

Množici

$$\mathcal{Z}_f := \{y \in Y : y = f(x) \text{ za nek } x \in \mathcal{D}_f\}$$

pravimo **zaloga vrednosti** preslikave  $f$ .



Slika na levi predstavlja neko preslikavo  $f : X \rightarrow Y$ .

Pišemo  $y = f(x)$  ali pa tudi  $f : x \mapsto y$ ,

in pravimo, da  $f$  **(pre)slika**  $x$  v  $y$ ,

$x$  je **argument**,  $y$  pa **vrednost** preslikave  $f$  pri  $x$ .

Tudi:  $y$  je **slika**  $x$ -a.

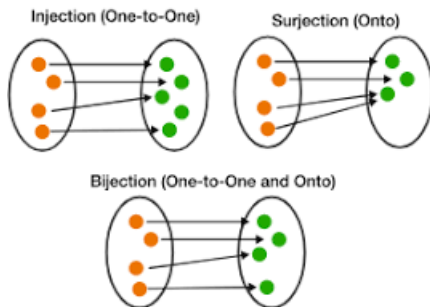
## Primer

Naj bo  $X$  množica nepraznih bitnih besed  $\{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots\}$  in  $Y$  množica naravnih števil  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . Kateri od naslednjih predpisov so dobro definirane preslikave iz  $X$  v  $Y$ ?

- $f_1(x) = y$  natanko tedaj, ko je  $y$  število enic v  $x$ -u.
- $f_2(x) = y$  natanko tedaj, ko je  $y$  prvi bit niza  $x$ .
- $f_3(x) = y$  natanko tedaj, ko je  $y$  mesto najbolj leve ničle v  $x$ -u.
- $f_4(x_1) = x_2$  natanko tedaj, ko  $x_2$  dobimo tako, da nizu  $x_1$  dodamo na koncu 0 ali 1.
- $f_5(x) = y$  natanko tedaj, ko je  $x$  niz  $y$  zaporednih enic.

Naj bo  $f : X \rightarrow Y$ . Pravimo, da je

- $f$  *injektivna*, če  $\forall x, y \in X : (f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$
- $f$  *surjektivna*, če  $Z_f = Y$  (pravimo tudi, da je  $f$  preslikava iz  $X$  *na*  $Y$ )
- $f$  *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.



Preslikavi  $\text{id}_X : X \rightarrow X$ , za katero velja  $\text{id}_X(x) = x$  za vsak  $x \in X$ , pravimo *identična preslikava* ali *identiteta* na množici  $X$ .

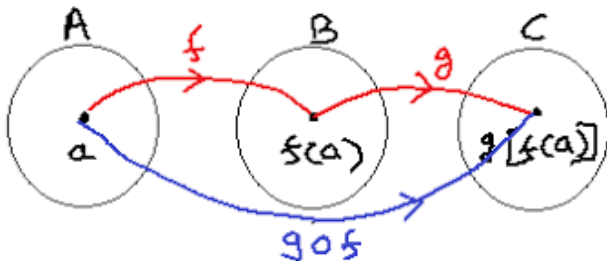


Naj bodo  $A, B, C$  množice in  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$  preslikave. Potem je

$$g \circ f : A \rightarrow C$$

preslikava iz  $A$  v  $C$ , določena s predpisom

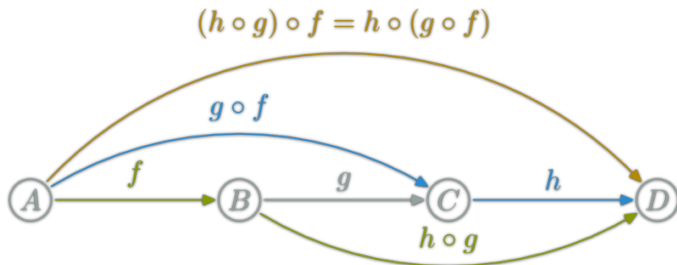
$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad \text{za vse } a \in A.$$



## Trditev

Kompozitum preslikav je asociativna operacija, velja namreč:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$



## Trditev

Naj bo  $f : A \rightarrow B$ . Potem je

$$f \circ \text{id}_A = \text{id}_B \circ f = f$$

Naj bosta  $A, B$  množici in  $f : A \rightarrow B$  preslikava. Kdaj obstaja preslikava  $f^{-1}$  iz neke podmnožice  $B_1 \subseteq B$  v  $A$ , da velja

$$f \circ f^{-1} = \text{id}_{B_1} \quad \text{in} \quad f^{-1} \circ f = \text{id}_A?$$

## Trditev

Naj bo  $f : A \rightarrow B$  preslikava.

- 1  $f^{-1} : \mathcal{Z}_f \rightarrow A$  je preslikava natanko tedaj, ko je  $f$  injektivna,
- 2  $f^{-1} : B \rightarrow A$  je preslikava natanko tedaj, ko je  $f$  bijektivna.

