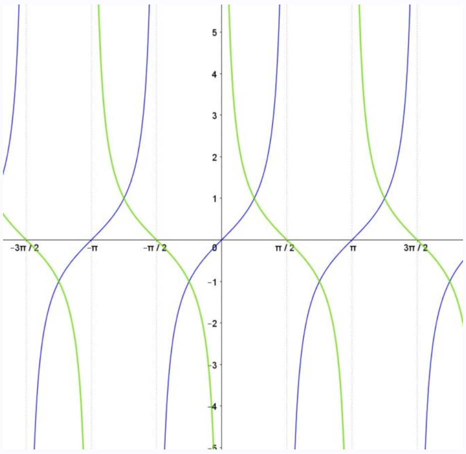
## Grafa tangensa in kotangensa

Z razumevanjem vrednosti funkcij $f(x) = \tan(x)$ in $g(x) = \cot(x)$ na enotski krožnici narišemo grafa (modro: tangens in zeleno: kotangens).




- Dinamična vizualizacija: https://ggbm.at/bwrbzm3y v https://www.geogebra.org/m/veaekmg5



## Nekatere vrednosti kotnih funkcij

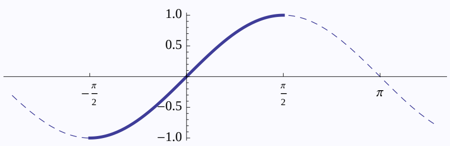
| $x$ | $\sin x$ | $\cos x$ | $\tan x$ | $\cot x$ |
|---|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ | $0$ | $\pm\infty$ |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ | $1$ |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | $1$ | $0$ | $\pm\infty$ | $0$ |

## Krožne funkcije - $\arcsin x$

**Krožne funkcije** je ime za (prirejene) inverzne funkcije kotnih funkcij.

Kotne funkcije niso injektivne, zato ne obstajajo njihove inverzne funkcije.

Če pa se omejimo na območje, kjer je posamezna kotna funkcija injektivna, lahko definiramo njen inverz.

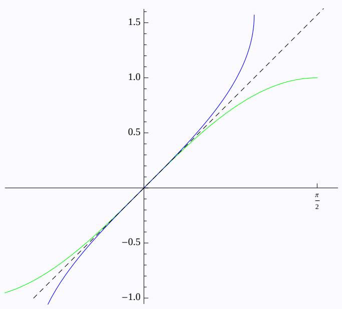



Funkcija sinus je bijektivna kot funkcija

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \xrightarrow{\sin} [-1, 1]$$

Zato obstaja inverzna funkcija, ki jo imenujemo **arkus sinus** in označimo $\arcsin x$. Ta funkcija je bijektivna kot funkcija

$$[-1, 1] \xrightarrow{\arcsin} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$



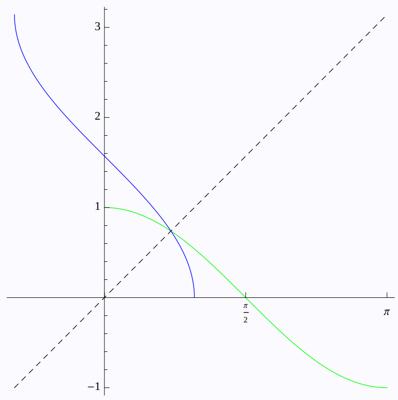

Na sliki levo je v zeleni barvi narisan odsek originalne funkcije $\sin x$, z modro pa njen inverz $\arcsin x$. Kot za druge med sabo inverzne funkcije velja

$$y = \arcsin x \iff \sin y = x$$

Velja tudi $\mathcal{D}_{\arcsin} = [-1, 1]$, $\mathcal{Z}_{\arcsin} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



## Krožne funkcije - $\arccos x$




Podobno je kosinus bijektivna funkcija

$$[0, \pi] \xrightarrow{\cos} [-1, 1]$$

Zato obstaja inverzna funkcija, ki jo imenujemo **arkus kosinus** in označimo $\arccos x$. Ta funkcija je bijektivna kot funkcija

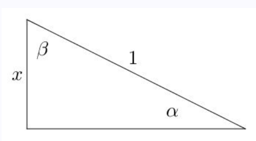
$$[-1, 1] \xrightarrow{\arccos} [0, \pi]$$

Na sliki je v zeleni barvi narisan odsek originalne funkcije $\cos x$, z modro pa njen inverz $\arccos x$. Kot za druge med sabo inverzne funkcije velja

$$y = \arccos x \iff \cos y = x$$

Velja tudi $\mathcal{D}_{\arccos} = [-1, 1]$, $\mathcal{Z}_{\arccos} = [0, \pi]$.

Velja enakost $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Dokaz: V pravokotnem trikotniku s poljubnima kotoma $\alpha$, $\beta$, hipotenuzo 1 in kateto $x$ velja $\sin \alpha = x$ in $\cos \beta = x$. Torej $\alpha = \arcsin x$ in $\beta = \arccos x$. Ker je $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, je s tem dokaz že končan.



## Krožne funkcije - $\operatorname{arctan}x$ in $\operatorname{arccot}x$

Podobno kot za sinus in kosinus definiramo inverzne funkcije tudi za tangens in kotangens.

Tangens in kotangens sta bijektivni funkciji

$$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \xrightarrow{\tan} [-\infty, \infty]$$
$$[0, \pi] \xrightarrow{\cot} [-\infty, \infty]$$

zato lahko definiramo bijektivni funkciji

$$[-\infty, \infty] \xrightarrow{\operatorname{arctan}} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
$$[-\infty, \infty] \xrightarrow{\operatorname{arccot}} [0, \pi]$$

Velja torej

- $y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x$
- $\mathcal{D}_{\operatorname{arctan}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_{\operatorname{arctan}} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- $y = \operatorname{arccot}x \Leftrightarrow \cot y = x$
- $\mathcal{D}_{\operatorname{arccot}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_{\operatorname{arccot}} = (0, \pi)$

Dinamična vizualizacija inverznih kotnih funkcij na https://ggbm.at/bwrbzm3y v https://www.geogebra.org/m/veaekmg5



## Nekatere vrednosti krožnih funkcij

| $x$ | $\arcsin x$ | $\arccos x$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
| $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{4}$ |
| $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{6}$ |
| 1 | $\frac{\pi}{2}$ | 0 |

| $x$ | $\operatorname{arctan}x$ | $\operatorname{arccot}x$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
| 1 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{4}$ |
| $\sqrt{3}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{6}$ |
| $\infty$ | $\frac{\pi}{2}$ | 0 |

## Funkcije - limite

### Limita funkcije

Limita funkcije v neki točki pove kako se funkcija v okolici te točke obnaša. V tej točki funkcija lahko sploh ni definirana.

**Limita funkcije** $f(x)$ v točki $a$ je število, kateremu se vrednosti $f(x)$ približujejo, ko se vrednost argumenta $x$ približuje vrednosti $a$. Zapišemo

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

in preberemo "limita $f(x)$, ko gre $x$ proti $a$".

Natančna **matematična definicija limite**: Število $L$ je limita funkcije $f(x)$, ko se $x$ približuje $a$, če za vsako število $\epsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da velja

$$|x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Intuitivno to pomeni, da če bo $x$ dovolj blizu $a$ bo tudi $f(x)$ poljubno blizu $L$.



### Limita funkcije intuitivno

Če je funkcija 'lepa' kot so običajne funkcije, na primer polinomi ali druge 'zvezne' funkcije (graf je nepretrgana krivulja), je limita take funkcije v vsaki točki kar njena vrednost. Očitno je namreč, da se vrednosti funkcije približujejo vrednosti funkcije v točki, ko se argument približuje dani točki.

Limite postanejo pomembne v posebnih točkah v katerih nam šele limita pomaga opisati, kaj se s funkcijo v bližini dane točke pravzaprav dogaja.

### Primeri

Poglejmo funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x}$, $g(x) = \frac{x}{x}$ in $h(x) = \frac{x}{x^2}$ in se vprašajmo, kaj so limite teh treh funkcij pri $x = 0$, oziroma, kako se funkcije obnašajo v okolici točke $x = 0$.

Čeprav nobena od treh funkcij v točki $x = 0$ ni definirana, je v tem primeru lahko ugotoviti

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0, \lim_{x \to 0} g(x) = 1 \text{ in } \lim_{x \to 0} h(x) = \pm\infty.$$

Za funkcijo $h(x)$ rečemo tudi, da limita, ko se $x$ približuje 0 ne obstaja. Z zapisom $\lim_{x \to 0} h(x) = \pm\infty$ smo o obnašanju funkcije v okolici $x = 0$ želeli povedati še več kot to, da limita ne obstaja. Namreč, če v zgornjih treh funkcijah krajšamo $x$, kar smemo narediti z opombo, da pri $x = 0$ pač funkcije niso definirane, dobimo

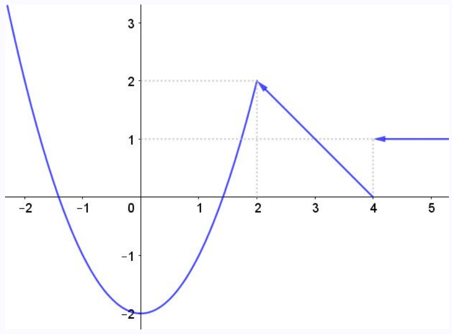
$$f(x) = x \text{ za } x \neq 0; g(x) = 1 \text{ za } x \neq 0 \text{ in } h(x) = \frac{1}{x}$$

## Primer

Funkcija podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \le 2, \\ -x + 4, & 2 < x \le 4, \\ 1, & 4 < x \end{cases}$$

ima graf




- Taki funkciji rečemo, da je odsekoma definirana (ker je definirana po odsekih z ločenim predpisom).
- Funkcija $f(x)$ je definirana povsod: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ ne obstaja: Če se $x$ približuje vrednosti 4 iz desne, je $f(x)$ konstantno enaka 1. Če pa se $x$ približuje vrednosti 4 iz leve, se $f(x)$ približuje vrednosti $f(4) = 0$.
- V vseh ostalih točkah ($a \neq 4$) limita funkcije obstaja: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.



## Leva in desna limita

Intuitivno je lahko razumeti pojma leve in desne limite.

**Leva limita** je vrednost, kateri se funkcija približuje, ko se vrednosti $x$-a približujejo dani točki iz leve strani. Oznaka:

$$\lim_{x \nearrow a} f(x) \quad \text{ali} \quad \lim_{x \to a^-} f(x)$$

**Desna limita** je vrednost, kateri se funkcija približuje, ko se vrednosti $x$-a približujejo dani točki iz desne strani. Oznaka:

$$\lim_{x \searrow a} f(x) \quad \text{ali} \quad \lim_{x \to a^+} f(x)$$

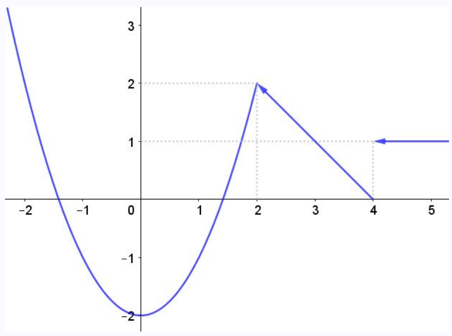
**Funkcija ima** v dani točki **limito**, če **sta** v tej točki **leva** in **desna limita enaki**.

V primeru funkcije $f(x)$ v zgornjem primeru velja

$$\lim_{x \nearrow 4} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \searrow 4} f(x) = 1$$

V točki $x = 4$ torej funkcija nima limite.



## Še nekaj primerov

- Ko računamo limite funkcij (podobno kot pri zaporedjih), smemo krajšati, saj je pri limiti vedno vprašanje kako se funkcija obnaša ob ‘približevanju’ in ne ob sami vrednosti, ki je mogoče enaka 0.
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$
- V točkah, kjer je $f(x)$ zvezna, limita $f(x)$ vedno obstaja in je enaka funkcijski vrednosti. Npr. za $a\neq 1$ je $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{a-1}{a^2-1}=\dfrac{1}{a+1}$.

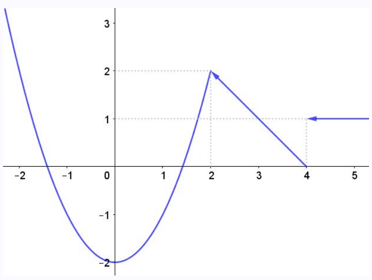
## Limite $x\longrightarrow\infty$

- Podobno kot pri zaporedjih lahko obravnavamo tudi obnašanje funkcij, ko gre argument v neskončnost. Z limito to zapišemo $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ali $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-x}{1-2x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^3}-2}=-\dfrac{1}{2}$



## Zvezne funkcije

- Funkcija je na intervalu zvezna, če je na tem intervalu graf funkcije ‘nepretrgana’ (zvezna) krivulja.
- Funkcija je na nekem intervalu zvezna, če v vsaki točki intervala limita funkcije obstaja (leva in desna limita sta enaki) in je kar enaka vrednosti funkcije.
- Če je $f$ zvezna v točki $a$ potem se vrednost $f(x)$ v bližnjih točkah zelo malo razlikuje of $f(a)$.
- Če sta $f$ in $g$ zvezni funkciji v točki $a$, potem so tudi $\alpha f$ ($\alpha$ je število), $f+g$, $f\cdot g$ zvezne funkcije v točki $a$. Funkcija $\frac{f}{g}$ je tudi zvezna v $a$, če le $g(a)\neq 0$.




- Funkcija iz zgornjega primera je zvezna v vseh točkah razen v točki $x=4$.
- Če je $f$ zvezna na zaprtem intervalu $[a,b]$ in je $f(a)f(b)<0$, potem obstaja točka $c\in[a,b]$, kjer je $f(c)=0$. Pogoj $f(a)f(b)<0$ pomeni, da sta vrednosti $f(a)$ in $f(b)$ različno predznačeni in ker je funkcija zvezna, mora nekje sekati $x$-os.

## Še dve limiti

Nekaterim funkcijam je limito nemogoče določiti s preprostimi metodami, kot je krajšanje. Primera takih limit sta

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} \quad \text{in} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Velja

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \quad \text{in} \quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\simeq 2.71828.$$

**Opozorilo.**

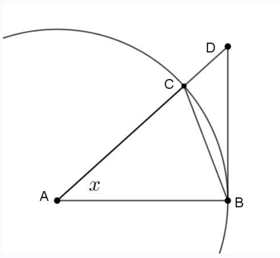
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$$

velja samo za $x$ v radianih. Če je $x$ v stopinjah dobimo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\frac{\pi}{180}.$$



## Dokaz $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$




V enotski krožnici narišimo poljuben kot $x$ kot kaže slika in izračunajmo ter primerjajmo ploščine trikotnikov $\Delta ABC$ in $\Delta ABD$ ter ploščino krožnega izseka $\triangledown ABC$. Geometrijsko je očitno, da za vsak $x$ velja

$$\Delta ABC \le \triangledown ABC \le \Delta ABD$$

Razmislimo: $\Delta ABC = \frac{\sin(x)}{2}$ in $\Delta ABD = \frac{\tan(x)}{2}$. Medtem ko je $\triangledown ABC = \frac{x}{2}$, če smo kot merili v radianih in $\triangledown ABC = \frac{\pi x}{360}$, če smo kot merili v stopinjah. Torej

$$\frac{\sin(x)}{2}\le\frac{x}{2} \quad \text{in} \quad \frac{x}{2}\le\frac{\tan(x)}{2}$$

in če poračunamo

$$\frac{\sin(x)}{x}\le 1 \quad \text{in} \quad \cos(x)\le\frac{\sin(x)}{x}$$

oziroma

$$\cos(x)\le\frac{\sin(x)}{x}\le 1.$$

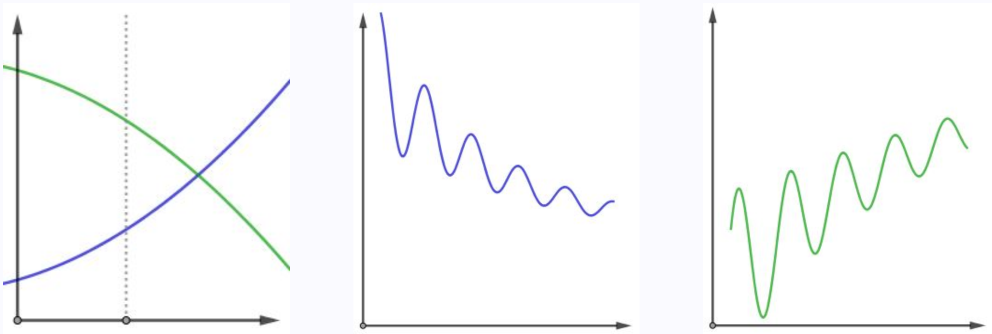
Ker je $\lim_{x\to 0}\cos(x)=1$, je tudi $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$. S povsem podobnim sklepanjem bi dobili, da je $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\frac{\pi}{180}$, ko v primeru uporabe stopinj vzamemo $\triangledown ABC=\frac{\pi x}{360}$.

## Odvod

### Kaj je odvod funkcije?

Odvod funkcije pove, kako se funkcija spreminja. Pogosto je stopnja spreminjanja funkcije pomembnejša od same vrednosti funkcije. Odvod funkcije v dani točki tako npr. lahko opisuje 'napredovanje' ali 'nazadovanje' v nekem trenutku, medtem ko vrednost funkcije opisuje le trenutno stanje.

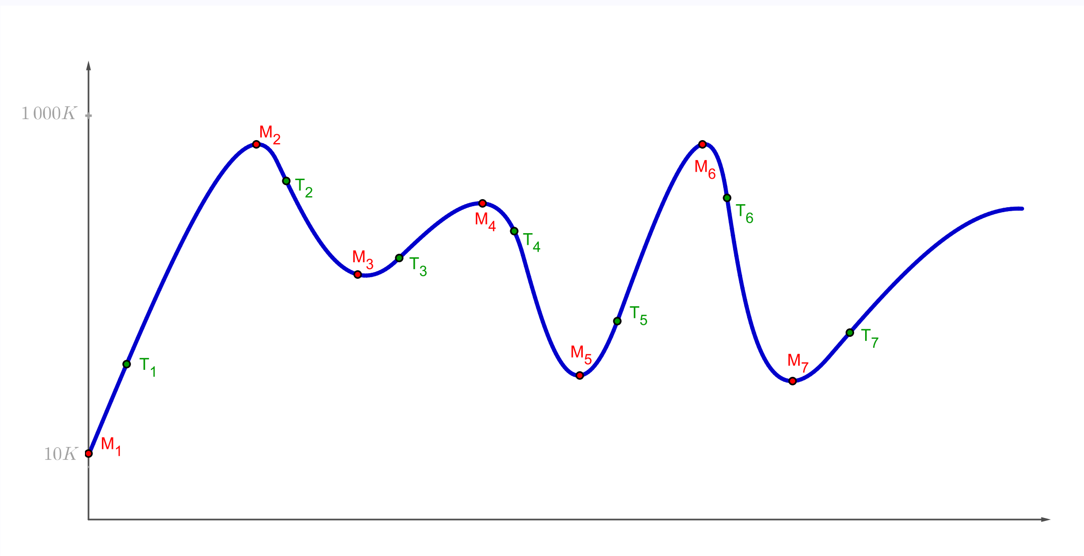
Opazujmo in komentirajmo grafe, ki zaporedoma ponazarjajo razvoj dveh držav ali temperaturo dveh bolnikov, dinamiko dveh različnih razvojev ...





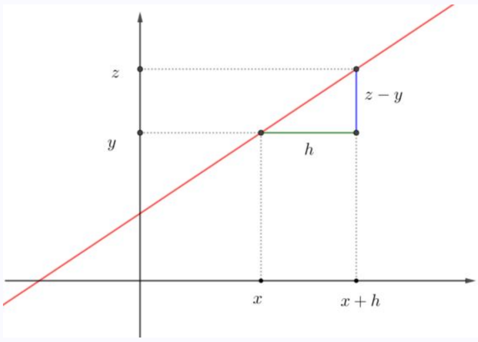
### Ocenimo poslovanje

Na spodnjem grafu je ponazorjeno poslovanje podjetja v daljšem časovnem obdobju. Na $x$-osi je čas, na $y$-osi pa 'pozitivna bilanca podjetja'. Točke $M_1$ do $M_7$ ponazarjajo trenutke prevzema vodenja podjetja s strani menedžerjev $M_1$ do $M_7$. V točkah $T_1$ do $T_7$ primerjajmo 'bilanco podjetja' in 'uspešnosti dela menedžerjev'.




- Dinamična vizualizacija strmine na krivulji: https://www.geogebra.org/m/njvfhwpt v https://www.geogebra.org/m/veaekmg5

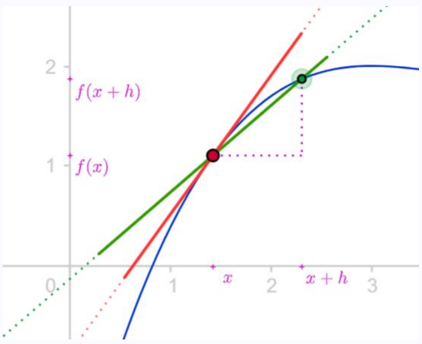
## Smerni koeficient premice




Smerni koeficient $k$ premice skozi dve dani točki $(x, y)$ in $(x+h, z)$ je enak $k = \frac{z-y}{h}$.



## Smerni koeficient sekante




Smerni koeficient 'sekante' (na sliki) skozi točki $(x, f(x))$ in $(x+h, f(x+h))$ je enak $k = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Čim manjši je $h$ tem bolj se sekanta približa tangenti. Zato je smerni koeficient tangente enak

$$k_t = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

- Dinamična vizualizacija: https://ggbm.at/qzee9wy8 v https://www.geogebra.org/m/veaekmg5

## Odvod

Smerni koeficient tangente v dani točki pove, kako se v tej točki funkcija spreminja. Imenujemo ga **odvod** in označimo $f'(x)$. Torej zapišemo

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Odvod funkcije $f(x)$ je torej definiran kot

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

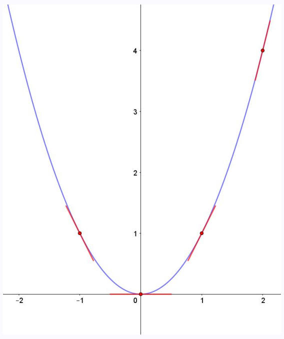
**Primer**

- Izračunajmo $f'(x)$ za $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2x + h}{1} = 2x \end{aligned}$$

- Torej je odvod funkcije $f(x) = x^2$ funkcija $f'(x) = 2x$.
- Funkcija $f(x) = x^2$ ima v vsaki točki $(a, a^2)$ strmino enako $2a$.
- Poglejmo kakšne so strmine v nekaj točkah

| točka | strmina |
|---|---|
| $(0, 0)$ | $0$ |
| $(1, 1)$ | $2$ |
| $(-1, 1)$ | $-2$ |
| $(2, 4)$ | $4$ |





**Primer**

Izračunajmo $f'(x)$ za $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1 \end{aligned}$$

**Primer**

Izračunajmo $f'(x)$ za $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{(x+h)xh} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

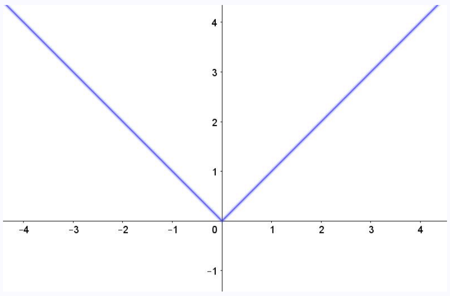
1. Razmislimo geometrijsko, zakaj za $f(x) = x$ velja $f'(x) = 1$.
2. Razmislimo geometrijsko, zakaj za $f(x) = c$ velja $f'(x) = 0$.

## Lahko odvod vedno izračunamo?

**NE!** Včasih ali vsaj v posameznih točkah odvoda za nekatere funkcije ni mogoče izračunati. Funkcija v neki točki ni odvedljiva, če v tej točki limita

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ne obstaja.




Na primer, za funkcijo $f(x) = |x|$ ta limita v točki $x = 0$ ne obstaja. Leva limita je $-1$ in desna limita je 1. Funkcija ni odvedljiva. Geometrijsko obstoj odvoda v neki točki pomeni 'gladkost', oziroma, da v tej točki lahko določimo strmino krivulje. V primeru $f(x) = |x|$ vidimo, da v točki $x = 0$ ne moremo govoriti o strmini: na levi je strmina enaka $-1$ na desni pa 1.

## Odvedljive funkcije

Rečemo, da je funkcija **odvedljiva** na intervalu $[a, b]$, če lahko izračunamo njen odvod v vsaki točki intervala $[a, b]$.

Odvedljiva funkcija na intervalu $[a, b]$ je na tem intervalu zvezna (nepretrgana) in 'gladka'.



## Tabela odvodov elementarnih funkcij

| f(x) | f'(x) |
|---|---|
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x$ | $a^x \ln a$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\log_a x$ | $\frac{1}{x \ln a}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ |

| f(x) | f'(x) |
|---|---|
| $\cos x$ | $-\sin x$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{(\cos x)^2}$ |
| $\cot x$ | $-\frac{1}{(\sin x)^2}$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |

Vse te formule sledijo, oziroma so izračunane po definiciji odvoda:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

**Opozorilo:** Formule za odvode kotnih funkcij veljajo za kotne funkcije v radianih. V stopinjah te formule ne veljajo. Na primer za funkcijo $f(x) = \sin(x)$ v stopinjah velja $\big(sin(x^o)\big)' = \frac{\pi}{180}\cos(x^o)$.