Tutorstvo - fizika, FRI

7. teden: dinamika togega telesa

1. **Hrček v kolesu** - 1. kolokvij 2014, naloga 4

Majhen hrček z maso $m_h = 50$ g teče v kolesu za hrčke. Kolo za hrčke opišemo kot plašč valja, ki je s tankimi in lahkimi prečkami vpet v os skozi središče valja. Polmer kolesa R je 15 cm, njegova masa m_k pa 0,2 kg. Hrček teče tako, da je vedno pri dnu kolesa, kolo pa se takrat vrti s kotno hitrostjo $\omega_1 = 5/\mathrm{s}$. Nato hrček neha teči in se s kremplji trdno oprime kolesa. Izračunaj kotno hitrost, s katero se takoj za tem vrtita kolo in hrček. Ali je hitrost dovolj velika, da kolo s hrčkom naredi poln obrat? Odgovor utemelji z računom.

Rešitev:

Na kolo in hrčka na začetku ne deluje noben zunanji navor, zato se bo ohranjala njuna skupna vrtilna količina:

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2$$

Ker se na začetku vrti samo kolo, hrček pa teče na mestu, bo k vrtilni količini s svojim vztrajnostnim momentom na začetku prispevalo le kolo. Ko pa se ga hrček oprime, moramo upoštevati tudi vztrajnostni moment hrčka. Kolo ima obliko plašča valja, hrčka pa lahko obravnavamo kot točkastega, zato bo vztrajnostni moment obeh teles enak mR^2.

$$\omega_2 = \frac{J_1}{J_2}\omega_1 = \frac{m_k R^2}{m_k R^2 + m_h R^2}\omega_1 = \frac{m_k}{m_k + m_h}\omega_1 = 4/\mathrm{s}$$

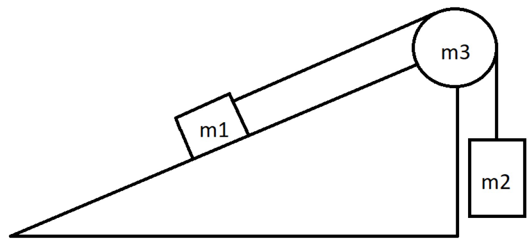
Če želi hrček napraviti poln obrat, mora premagati potencialno razliko med dnom in vrhom kolesa. Če postavimo ničlo potencialne energije na dno kolesa, mora biti kinetična energija na začetku večja od potencialne energije na vrhu.

$$\frac{1}{2}J_2\omega_2^2 > m_h g \cdot 2R$$

Ko vstavimo podatke, ugotovimo, da znaša kinetična energija na začetku 0.045 J, potencialna na koncu pa 0.15 J, kar pomeni, da hrčku ne bo uspelo narediti polnega obrata.

2. Klada na klancu

Na klancu z naklonskim kotom α se nahaja klada z maso m_1, ki je prek škripca z vrvjo povezana z utežjo mase m_2 (glej skico). Škripec lahko obravnavamo kot valj z maso m_3. Razmerje mas m_1/m_2 je takšno, da se klada giblje po klancu navzgor. Kolikšen je pospešek sistema, če lahko trenje zanemarimo? Vrv se giblje po škripcu brez zdrsavanja.



Rešitev:

Nalogo bomo rešili s pomočjo ohranitve energije. Postavimo koordinatni sistem tako, da kaže os x navzdol, utež pa naj se na začetku nahaja v izhodišču. Potencialna energija sistema naj bo na začetku 0. Zapišimo ohranitev energije:

$$\Delta W_k + \Delta W_p = 0$$

Kinetična energija je sestavljena iz translacijske energije klade in uteži ter rotacijske energije škripca. Pri potencialni energiji moramo paziti, da se višina klade spreminja kot $h_k = x \sin \alpha$.

$$\frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} J_3 \omega^2 = m_2 g x - m_1 g x \sin \alpha$$

Upoštevamo, da znaša vztrajnostni moment škripca $m_3 R^2/2$, kjer je R polmer valja, in da se vrv giblje po škripcu prez zdrsavanja, kar nam da zvezo $v = R\omega$. Enačbo pomnožimo z 2 in izrazimo v^2:

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{m_3}{2}\right) v^2 = 2g(m_2 - m_1 \sin \alpha) x$$

$$v^2 = 2g \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2 + \frac{m_3}{2}} x$$

Izraz na desni strani smo nekoliko preoblikovali, saj bomo v njem poskušali prepoznati pospešek sistema. Spomnimo se enačbe za enakomerno pospešeno gibanje, ki povezuje pot, hitrost in pospešek:

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

Če upoštevamo, da je $v_0 = 0$, lahko ob primerjavi obeh enačb ugotovimo, da člen med 2 in x predstavlja pospešek.

$$a = g \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_1 + m_2 + \frac{m_3}{2}}$$

Če tega ne vidimo, si lahko pomagamo s posrednim odvajanjem. Zaradi krajšega pisanja označimo člen, ki smo ga zgoraj identificirali kot pospešek, z neko konstanto C:

$$v^2 = 2Cx \rightarrow v = \sqrt{2Cx}$$

Pospešek zapišemo kot odvod poti po času in prevedemo na odvajanje po spremenljivki x.

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}(\sqrt{2Cx}) \cdot \sqrt{2Cx} = \frac{C}{\sqrt{2Cx}} \cdot \sqrt{2Cx} = C$$

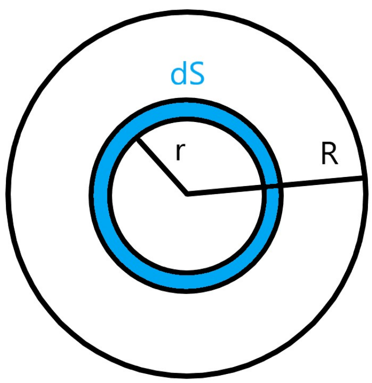
Vidimo, da je a res enak C.

3. Vztrajnostni moment stožca

Izračunaj vztrajnostni moment stožca z višino h in polmerom osnovne ploskve R okrog njegove simetrijske osi, če njegova gostota pada linearno z višino, tako da je na dnu enaka ρ_0, na vrhu pa 0. Rezultat izrazi z maso stožca.

Rešitev:

Spomnimo se, da je vztrajnostni moment definiran kot $J = \int r^2 dm$, kjer r predstavlja razdaljo od osi, okrog katere se telo vrti. Za začetek si poglejmo, kako izpeljemo vztrajnostni moment polnega homogenega valja z maso m in polmerom R. Vemo, da vztrajnostni moment tankega obroča z maso m in polmerom R znaša kar mR^2, saj je masa razporejena tako, da je razdalja od osi konstantna. To nam pomaga, saj si lahko mislimo, da je naš valj sestavljen iz infinitezimalno tankih koncentričnih obročev širine dr s površino dS:



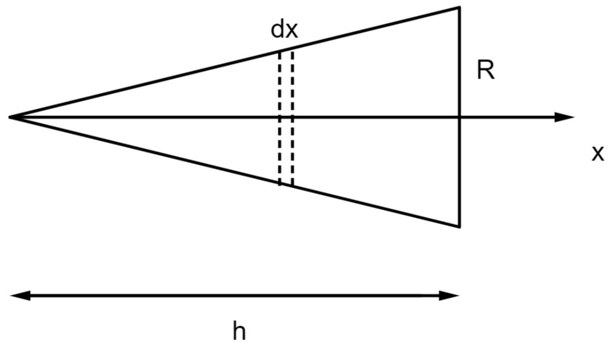
Masa enega izmed obročev je sorazmerna njegovi ploščini.

$$dm = \frac{dS}{S_{valja}} m = \frac{2\pi r dr}{\pi R^2} m = \frac{2r dr}{R^2} m,$$

kjer m predstavlja maso valja. Sedaj moramo le še vstaviti dm v izraz za vztrajnostni moment in pointegrirati od 0 do R:

$$J = \int_0^R \frac{2mr^3 dr}{R^2} = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2mR^4}{4R^2} = \frac{1}{2} mR^2$$

S tem rezultatom si bomo pomagali pri izpeljavi vztrajnostnega momenta našega stožca. Uporabili bomo podoben pristop kot pri valju, le da si bomo tokrat mislili, da je stožec sestavljen iz invinitezimalno tankih valjev mase dm in debeline dx.



Postavimo os x, kot kaže skica, in zapišimo prispevek enega izmed valjev.

$$dJ = \frac{1}{2} r(x)^2 dm$$

$$dm = \rho(x) dV = \rho(x) S(x) dx \rightarrow dJ = \frac{1}{2} r(x)^2 \rho(x) S(x) dx$$

Polmer, ploščino in gostoto valja v odvisnosti od x moramo še določiti. $r(x)$ dobimo s pomočjo razmerij istoležnih stranic v podobnih trikotnikih:

$$\frac{r(x)}{x} = \frac{R}{h} \rightarrow r(x) = \frac{Rx}{h}$$

Ploščina osnovne ploskve valja je preprosto $\pi r(x)^2$.

$$S(x) = \frac{\pi R^2 x^2}{h^2}$$

Vemo, da gostota pada linearno z višino in da je na vrhu stožca enaka 0, na dnu pa ρ_0. Zapišemo $\rho(x) = kx + n$ in vstavimo izraz v $\rho(0) = 0$ in $\rho(h) = \rho_0$ in dobimo

$$\rho(x) = \frac{\rho_0 x}{h}$$

Vse tri izraze vstavimo v izraz za dJ in integriramo od 0 do h:

$$dJ = \frac{1}{2} \frac{\pi \rho_0 R^4 x^5}{h^5}$$

$$J = \frac{\pi \rho_0 R^4}{2h^5} \int_0^h x^5 dx = \frac{\pi \rho_0 R^4 h}{12}$$

Maso stožca dobimo z integracijo gostote po volumnu.

$$m = \int \rho dV = \int_0^h \rho(x) S(x) dx = \frac{\pi \rho_0 R^2}{h^3} \int_0^h x^3 dx = \frac{\pi \rho_0 R^2 h}{4}$$

Izrazimo $\rho_0 = 4m/\pi R^2 h$ in vstavimo v izraz za J.

$$J = \frac{1}{3} m R^2$$