Diskretne strukture

Osmi sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

26. november 2021

Trditev

Naj bodo A, B, C množice in $f : A \to B$, $g : B \to C$ preslikavi. Velja:

1. f, g *injektivni* $\Longrightarrow g \circ f$ *injektivna*
2. f, g *surjektivni* $\Longrightarrow g \circ f$ *surjektivna*
3. $g \circ f$ *injektivna* $\Longrightarrow f$ *injektivna*
4. $g \circ f$ *surjektivna* $\Longrightarrow g$ *surjektivna*

Dokaz točke 1. Naj bosta $a_1, a_2 \in A$, ki zadoščata $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$. Po definiciji kompozituma to pomeni, da je $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$. Ker je g injektivna, od tod sledi $f(a_1) = f(a_2)$. Ker je f injektivna, od tod sledi $a_1 = a_2$. To pa pomeni, da je $g \circ f$ injektivna.

Dokaz točke 4. Naj bosta $c \in C$ poljuben. Iščemo $b \in B$, ki zadošča $g(b) = c$. Ker je $g \circ f$ surjektivna, obstaja $a \in A$, da velja $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c$. Za b lahko vzamemo $f(a)$.

Posledica

Naj bosta A, B množici in $f : A \to B$, $g : B \to A$, preslikavi. Če je

$$g \circ f = \mathrm{id}_A \quad \textit{in} \quad f \circ g = \mathrm{id}_B,$$

potem sta

$$f, g \textit{ bijekciji in je } g = f^{-1}.$$

Poglavje 5

Relacije

Kaj je relacija

Naj bo A dana množica.

Množica R je *(dvomestna) relacija* v množici A, če je vsak njen element *urejen par* iz $A \times A$.

$$R \text{ je relacija.} \quad \iff \quad \forall x \in R\, \exists u, v \,:\, x = (u, v)$$

Primer

1. $A = \{e, f, g, h\} \qquad R = \{(e, f), (f, g), (g, h)\}$
   xRy ... *x je v abecedi neposredno pred y*
2. $A = \mathbb{N} \qquad R = \{(x, y)\,;\, x, y \in \mathbb{N} \wedge x \leq y\}$
3. $\emptyset \subseteq A \times A$ *prazna relacija*
4. $U_A := A \times A \subseteq A \times A$ *univerzalna relacija*
5. $\mathrm{id}_A = \{(x, x)\,;\, x \in A\}$ *relacija enakosti (identitete)*

Namesto $(x, y) \in R$ pišemo xRy.

Naj bo R relacija v A.

$\mathcal{D}_R = \{x \,;\, \exists y : xRy\}$ *domena* ali *definicijsko območje* relacije R.

$\mathcal{Z}_R = \{y \,;\, \exists x : xRy\}$ *zaloga vrednosti* relacije R.

Pravimo, da je

1. R *refleksivna* $\iff \forall x \in A : xRx$,
2. R *simetrična* $\iff \forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$,
3. R *antisimetrična* $\iff \forall x, y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$,
4. R *tranzitivna* $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$,
5. R *enolična* $\iff \forall x, y, z \in A : xRy \wedge xRz \Rightarrow y = z$.

Primer

1. *Relacija* id_A *v* A *je refleksivna, simetrična, antisimetrična, tranzitivna in enolična.*
2. *Relacija* $\leq$ *v* $\mathbb{N}$ *je refleksivna, antisimetrična, tranzitivna.*
3. *Relacija* $<$ *v* $\mathbb{N}$ *je antisimetrična, tranzitivna.*
4. *Relacija* $\subseteq$ *v* $\mathcal{P}A$ *je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna.*
5. *Relacija "oče" v množici ljudi (x oče y preberemo kot x je oče y-ona.) je antisimetrična.*

Grafična predstavitev relacije

R naj bo relacija v *končni* množici A.

Elemente množice A narišemo kot *točke* v ravnini. Če velja aRb, narišemo *usmerjeno puščico* od a do b.

elementi A ... točke v ravnini
aRb ... usmerjena puščica od a do b.

Vprašanje: Kako iz grafa relacije R videti, katere od lastnosti ima relacija R? Pravimo, da je

1. R *refleksivna* $\iff$ Vsaka točka povezana sama s sabo s puščico v obe smeri.
2. R *simetrična* $\iff$ Vse puščice so usmerjene v obe smeri.
3. R *antisimetrična* $\iff$ Ne obstaja puščica med različnima točkama, usmerjena v obe smeri.
4. R *tranzitivna* $\iff$ Če iz točke 1 v točko 2 in iz točke 2 v točko 3 vodita usmerjeni puščici, potem tudi iz točke 1 v točko 3 vodi usmerjena puščica.
5. R *enolična* $\iff$ Iz vsake točke vodi največ ena usmerjena puščica v neko točko.

Operacije z relacijami

Relacije so posebne vrste množic. Vemo, kako so definirane operacije $\cup, \cap$ in $\setminus$.

Ponavadi se pogovarjamo o družini relacij na isti množici A. V takem primeru je *komplement* smiselno definirati kot

$$R^c := (A \times A) \setminus R = U_A \setminus R$$

Poleg navedenih operacij definiramo tudi:

- *inverzno relacijo* relacije R, označimo jo z R^{-1}:

  $$R^{-1} := \{(y, x) \; ; \; (x, y) \in R\}$$

  Velja $xRy \Leftrightarrow yR^{-1}x$.

- *produkt relacij* R in S, označimo ga z $R * S$:

  $$R * S := \{(x, z) \; ; \; \exists y \; (xRy \wedge ySz)\}$$

Primer (sorodstvene relacije med ljudmi)

Relacija oče v množici ljudi je definirana kot

$$x \text{ oče } y \Leftrightarrow x \text{ je oče } y\text{-ona.}$$

Naloga: Izrazi relacije roditelj, zet, snaha, ded, vnuk, tašča, svak z "bolj elementarnimi" sorodstvenimi relacijami oče, mati, sin, hči, mož, žena, ...

roditelj $=$ *oče* $\cup$ *mati*

mati $=$ *roditelj* $\setminus$ *oče*

zet $=$ *mož* $*$ *hči*

ded $=$ *oče* $*$ *oče* $\cup$ *oče* $*$ *mati* $=$ *oče* $*$ (*oče* $\cup$ *mati*) $=$ *oče* $*$ *roditelj*

vnuk $=$ *sin* $*$ *sin* $\cup$ *sin* $*$ *hči* $=$ *sin* $*$ (*sin* $\cup$ *hči*) $=$ *sin* $*$ *otrok*

tašča $=$ *mati* $*$ *mož* $\cup$ *mati* $*$ *žena* $=$ *mati* $*$ *zakonec*

svak $=$ *brat* $*$ *žena* $\cup$ *brat* $*$ *mož* $\cup$ *mož* $*$ *sestra* $=$
brat $*$ *zakonec* $\cup$ *mož* $*$ *sestra*

Zaradi asociativnosti množenja relacij lahko definiramo *potence* relacij. Naj bo $R \subseteq A \times A$.

$$\begin{array}{lcl} R^0 & := & \mathrm{id}_A \\ R^{n+1} & := & R^n * R, \text{ če je } n \geq 0. \end{array}$$

Velja $R^1 = R$, $R^2 = R * R$, ter za $m, n \geq 0$ tudi $R^m * R^n = R^{m+n}$.

Definiramo lahko tudi potence z negativnimi eksponenti, če je $n > 0$, potem

$$R^{-n} := (R^{-1})^n$$

Toda če sta m in n celi števili različnih predznakov, potem $R^n * R^m$ ni nujno enako R^{m+n}.

Primer (Sorodstvene relacije med ljudmi - ponovno)

Definiraj relacije **prednik**, **potomec**, **sorodnik**.

$prednik = roditelj \cup roditelj * roditelj$
$\cup\, roditelj * roditelj * roditelj \cup \ldots =$
$roditelj \cup roditelj^2 \cup roditelj^3 \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty}(roditelj)^k$

$potomec = otrok \cup otrok * otrok \cup otrok * otrok * otrok \cup \ldots =$
$otrok \cup otrok^2 \cup otrok^3 \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty}(otrok)^k$

$sorodnik = potomec * prednik = potomec * potomec^{-1}$