Približki s Taylorjevimi polinomi

- Z diferencialom smo dobili približek: $f(x_0+h) \simeq f(x_0) + f'(x_0)h$
- Podobno s pomočjo višjih odvodov dobimo še boljše približke:
  $f(x_0+h) \simeq f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1} \cdot h + \frac{f''(x_0) \cdot h^2}{2!} + \frac{f'''(x_0) \cdot h^3}{3!} + \ldots$
  - Znaku ('klicaju') rečemo **fakulteta**.
    Tako npr. 3! preberemo 'tri fakulteta'. Pomen je pa razviden iz naslednjih zapisov:

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ 2! &= 2 \cdot 1 = 2 \\ 3! &= 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \\ 4! &= 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24 \\ &\ldots \end{aligned}$$

    Natančno pa lahko 'fakulteto' definiramo rekurzivno:

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ n! &= n \cdot (n-1)! \end{aligned}$$

Približki s Taylorjevimi polinomi - nadaljevanje

- Če v formuli

$$f(x_0+h) \simeq f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1} \cdot h + \frac{f''(x_0) \cdot h^2}{2!} + \frac{f'''(x_0) \cdot h^3}{3!} + \ldots$$

  vzamemo $x_0 = 0$ in zapišemo $h = x$ (rečemo: približek ali razvoj v okolici 0) dobimo:

$$f(x) \simeq f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2!} + \frac{f'''(0) \cdot x^3}{3!} + \ldots$$

- Rečemo, da funkcijo $f(x)$ aproksimiramo s (Taylorjevim) polinomom.
- Taylorjeve aproksimacije za nekatere znane funkcije:
  - $e^x \simeq 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$
  - $\sin x \simeq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
  - $\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!}$
  - Iz prvega izraza pri $x = 1$ lahko na primer dobimo približke za e:

$$e \simeq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

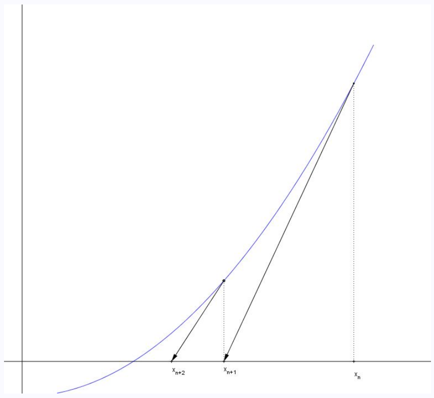
Dinamična vizualizacija na https://ggbm.at/rnn2bknq v https://www.geogebra.org/m/veaekmg5

Uporaba odvoda - Numerično računanje ničel funkcije (Newtonova metoda)

- Včasih je funkcija preveč zapletena, da bi lahko z razstavljanjem ali kako drugače točno določili ničlo. Takrat si pomagamo z numeričnim izračunavanjem ničel.
- S pomočjo odvoda in enačbe tangente lahko izračunamo zaporedje vse boljših približkov za ničlo dane funkcije.
- Uporabimo algoritem, ki s pomočjo formule

$$\mathbf{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

pripelje do vse boljših približkov za ničlo.



- Algoritem je še posebej primeren za računalniško uporabo.
- Na primer za funkcijo $f(x) = \frac{x^2}{15} + x - 1$, kjer lahko tudi eksplicitno izračunamo (pozitivno) ničlo, bi ob začetnem približku $x_0 = 5$ že pri $x_3 = 0.941$ dobili ničlo na tri decimalna mesta natančno.

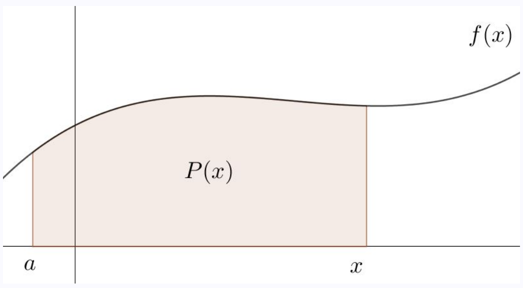
Dinamična vizualizacija na https://ggbm.at/ufmvqwer v https://www.geogebra.org/m/veaekmg5

Integral

Še o funkcijah ...

Opazujmo pozitivno funkcijo f in njen graf. Ploščina pod grafom funkcije f je očitno odvisna od funkcije f.

Če opazujemo ploščino $P(x)$ pod grafom funkcije f od neke vrednosti (na primer a) do vrednosti x, ki se spreminja očitno dobimo neko novo funkcijo $P(x)$.



Razmislimo, kaj lahko povemo o tej funkciji? Zakaj je funkcija $P(x)$ naraščajoča (tudi če je $f(x)$ padajoča)?

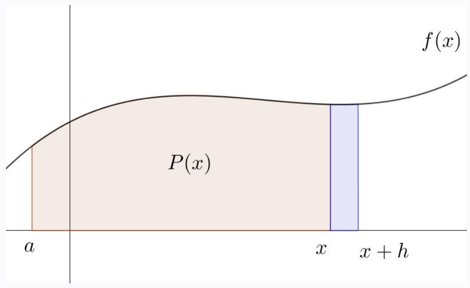
- Je mogoče, da čeprav o funkciji $P(x)$ ne vemo prav veliko, lahko ugotovimo kolikšen je njen odvod $P'(x)$?

Odvod funkcije ploščine pod grafom $f(x)$

- Spomnimo se, da je odvod funkcije $P(x)$ enak

$$P'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{P(x+h) - P(x)}{h}$$

- Ker funkcijo $P(x)$ poznamo predvsem iz slike si to narišimo (slika desno).
- Izraz $P(x+h) - P(x)$ ustreza ploščini 'modrega pravokotnika', ki je približno enaka $f(x) \cdot h$.
- Torej velja



$$P'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{P(x+h) - P(x)}{h} = f(x)$$

Odvod funkcije ploščine pod grafom $f(x)$ je kar ...

- Ugotovili smo torej, da je odvod funkcije ploščine pod grafom $f(x)$ kar funkcija $f(x)$.
- Kaj to pomeni?
- Ker je na primer $\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$, oziroma za $F(x) = \frac{x^3}{3}$ in $f(x) = x^2$ velja $F'(x) = f(x)$, nam funkcija $F(x)$ veliko pove o ploščini pod grafom funkcije $f(x)$.
- Ob pogledu na prejšnjo skico bi na primer $F(3)$ bila ploščina pod grafom $f(x)$ med a in 3. Lahko si predstavljamo, da je a dovolj daleč na levo, oziroma, da bi ploščino pod grafom $f(x)$ na primer med 1 in 3 izračunali preprosto z razliko $F(3) - F(1)$.
- Ploščino pod grafom $f(x) = x^2$ na primer na intervalu od 0 do 2 bi izračunali preprosto kot $F(2) - F(0) = \frac{8}{3}$, kjer je $F(x) = \frac{x^3}{3}$.
- Opazimo tudi, da bi povsem isti rezultat dobili, če bi vzeli $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$.

Nedoločeni integral

- Če velja
$$F'(x) = f(x)$$
potem je ploščina pod grafom $f(x)$ med a in b kar enaka
$$F(b) - F(a).$$
- Zato je pri dani funkciji $f(x)$ iskanje take funkcije $F(x)$, da velja $F'(x) = f(x)$ zelo pomembno.
- Pri dani funkciji $f(x)$ iskano funkcijo $F(x)$ imenujemo **primitivna funkcija funkcije** $f(x)$ ali **nedoločeni integral funkcije** $f(x)$.
- Nedoločeni integral funkcije $f(x)$ označimo z znakom
$$\int f(x)dx$$
- Opazimo, da če je $F(x)$ primitivna funkcija $f(x)$, je $F(x) + C$ tudi primitivna funkcija $f(x)$.

Lastnosti nedoločenega integrala

- Nedoločeni integral je torej pomemben postopek iskanja funkcije, ki omogoča izračun ploščine pod prvotno funkcijo.
- Nedoločeni integral ... pomeni iskanje funkcije, katere odvod bo prvotna funkcija.
- Tabela odvodov je, če jo razumemo v obratni smeri, hkrati tabela nedoločenih integralov.
- Lastnosti za nedoločen integral sledijo iz lastnosti odvoda. Na primer, ker velja
$$\big(F(x) + G(x)\big)' = F'(x) + G'(x)$$
velja tudi
$$\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$
In ker velja
$$\big(aF(x)\big)' = aF'(x),$$
velja tudi
$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx.$$

Tabela elementarnih integralov

Iz tabele elementarnih odvodov sledi:

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \qquad \int \frac{-dx}{1+x^2} = \mathrm{arcctg}\,x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Opozorilo !

Razmislimo: Ali iz prejšnjih formul

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad \text{in} \qquad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + C \quad \text{ter}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C \quad \text{in} \qquad \int \frac{-dx}{1+x^2} = \mathrm{arcctg}\,x + C$$

sledi $\arcsin x = -\arccos x$ in $\arctan x = -\mathrm{arcctg}\,x$?

NE, velja pa, da se funkciji $\arcsin x$ in $-\arccos x$ ter $\arctan x$ in $-\mathrm{arcctg}\,x$ razlikujeta le za konstanto.

Dinamična vizualizacija https://www.geogebra.org/m/vphuw4vq V https://www.geogebra.org/m/veaekmg5

Določeni integral

Spoznali smo in se dogovorili

- če velja $F'(x) = f(x)$ rečemo,
  - da je odvod funkcije $F(x)$ enak funkciji $f(x)$, ali tudi
  - da je funkcija $F(x)$ **nedoločeni integral** (ali **primitivna funkcija**) funkcije $f(x)$ in zapišemo
  $$F(x) = \int f(x)dx;$$
  - in ploščina pod krivuljo $f(x)$ na intervalu od a do b je kar enaka $F(b) - F(a)$.
- Izraz
$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$
imenujemo **določeni integral funkcije** $f(x)$ **v mejah od** a **do** b.
- Zapišemo tudi $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$.
- Določeni integral $\int_a^b f(x)dx$ pomeni ploščino pod grafom $f(x)$ na intervalu od a do b.
- Formuli
$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$$
rečemo tudi **Newton-Leibnizova formula**.

Nedoločeni integral kot 'določeni integral'

Za funkcijo $f(x)$ lahko nedoločeni integral

$$F(x) = \int f(x)\, dx$$

zapišemo tudi kot

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$$

je torej **nedoločeni integral** funkcije $f(x)$ - torej velja $F'(x) = f(x)$.

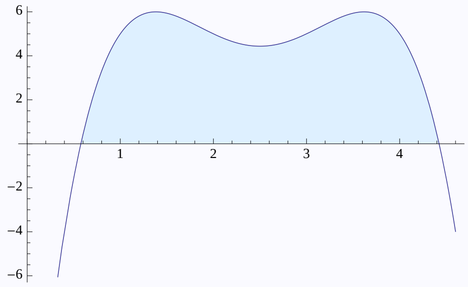
Ponovimo

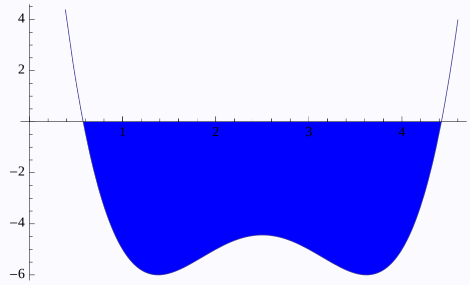
- Če velja $F'(x) = f(x)$ potem je ploščina pod grafom $f(x)$ med a in b kar enaka $F(b) - F(a)$.
- To velja tudi za funkcijo $f(x)$, ki ni nujno pozitivna, le da je treba na tistih delih, kjer je funkcija negativna, ploščino šteti negativno.
- Na primer za funkciji $F(x) = \frac{x^4}{4} - x$ in $f(x) = x^3 - 1$ velja $F'(x) = f(x)$. Če govorimo o ploščini 'pod $f(x)$' med 0 in 1 izračunamo $F(1) - F(0) = -\frac{3}{4}$, kar pomeni, da je ploščina med grafom $f(x)$ in koordinatnima osema enaka $\frac{3}{4}$, predznak pa pove, da je ta ploščina pod abscisno osjo, oziroma, da je na tem intervalu $f(x)$ negativna.

Določeni integral in ploščina

V kakšnem odnosu sta torej določeni integral funkcije in ploščina med x-osjo in funkcijo?

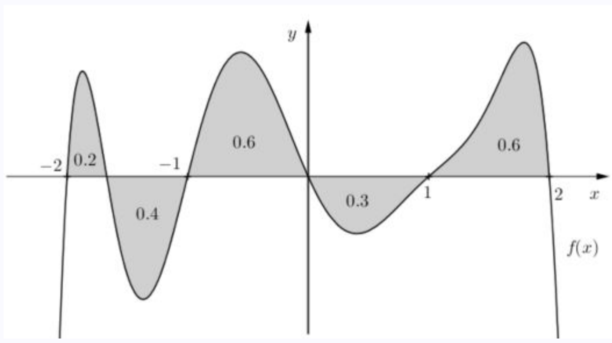
- Če je $f(x) \geq 0$ za vse $x \in [a, b]$, je $P = \int_a^b f(x)\, dx$,
- če je $f(x) \leq 0$ na $[a, b]$, je $P = -\int_a^b f(x)\, dx$.





Določeni integral in ploščina - nadaljevanje

Določeni integral funkcije ‘ploščino nad x-osjo prišteva’, ‘ploščino pod x-osjo pa odšteva’. Ob primeru funkcije $f(x)$ na sliki,



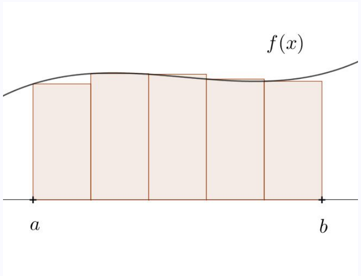
kjer so na grafu označene ustrezne ploščine ’krivočrtnih likov’ lahko zapišemo naslednje določene integrale

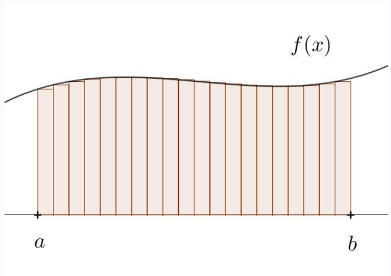
- $\int_0^1 f(x)\, dx = -0.3$
- $\int_{-1}^1 f(x)\, dx = 0.3$
- $\int_{-1}^2 f(x)\, dx = 0.9$
- $\int_1^2 f(x)\, dx = 0.6$
- $\int_0^2 f(x)\, dx = 0.3$
- $\int_{-2}^2 f(x)\, dx = 0.7$

Drugi pogled na določeni integral

Za dovolj lepo (na primer zvezno) funkcijo $f(x)$ na intervalu $[a, b]$

- najprej interval $[a, b]$ razdelimo na n pod-intervalov $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$,
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$
tako, da bo vsak interval vsak širine $\delta_n = \dfrac{b-a}{n}$.
- Za vsak $k = 0, 1, \ldots, n-1$ izberemo neko vrednost $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ in
- zapišemo **integralsko vsoto** funkcije f kot $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\delta_n$.
- Če bi za $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$ vsakič vzeli kar levi rob intervala, to je $c_k = x_{k-1}$, bi za primera $n = 5$ in $n = 20$ pomen integralske vsote lahko predstavili grafično kot naslednji ploščini

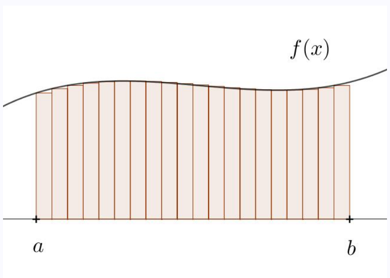




Drugi pogled na določeni integral - nadaljevanje

Določeni integral funkcije $f(x)$ na $[a, b]$ torej lahko razumemo tudi kot:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\delta_n$$



Intuitivno to pomeni, da ploščino pod krivuljo dobimo kot limito vsot 'ozkih pravokotnikov pod grafom funkcije', kjer limita pomeni, da vzamemo vse ožje in ožje pravokotnike, kot je nakazano na sliki.

Dinamična vizualizacija na https://ggbm.at/ctb25ktx v https://www.geogebra.org/m/veaekmg5

Primer

Izračunajmo na ta način določeni integral funkcije $f(x) = x$ na intervalu $[0, 3]$.

- Interval $[0, 3]$ razdelimo na n enakih delov. Vsak del ima širino $\delta_n = \frac{3}{n}$.
- Delilne točke so potem $i \cdot \frac{3}{n}$ za $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.
- Če za $c_i \in [(i-1) \cdot \frac{3}{n}, i \cdot \frac{3}{n}]$ vzamemo kar $c_i = i \cdot \frac{3}{n}$, potem je $f(c_i) = i \cdot \frac{3}{n}$ in $f(c_i)\delta_n = i \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{3}{n} = i\frac{9}{n^2}$.
- Dobimo

$$\int_0^3 x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i\frac{9}{n^2} = 9 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i = 9 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{9}{2}.$$

- Rezultat ustreza določenemu integralu izračunanemu po Newton-Leibnizovi formuli

$$\int_0^3 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^3 = \frac{3^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{9}{2}.$$

Naloge

Izračunajmo

$$\int (1-x^2)^2\,dx$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^2\,dx$$

$$\int_0^2 (1-x^2)^2\,dx$$

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^2\,dx$$

$$\int_{-2}^2 (1-x^2)^2\,dx$$

Izračunamo nedoločeni ntegral

$$\int (1-x^2)^2\,dx = \int (1-2x^2+x^4)\,dx = x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + C.$$

Od tu dobimo

$$\int_0^1 (1-x^2)^2\,dx = \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - (0 - 0 + 0) = \frac{8}{15}$$

$$\int_0^2 (1-x^2)^2\,dx = \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^2 = 2 - \frac{16}{3} + \frac{32}{5} - (0 - 0 + 0) = \frac{46}{15}$$

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^2\,dx = \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-1}^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} - (-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}) = \frac{16}{15}$$

$$\int_{-2}^2 (1-x^2)^2\,dx = \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{-2}^2 = 2 - \frac{16}{3} + \frac{32}{5} - (-2 + \frac{16}{3} - \frac{32}{5}) = \frac{92}{15}$$