Diskretne strukture

Enajsti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

17. december 2021

Primeri problemov za teorijo grafov

1. Ob začetku srečanja se je 9 prijateljev rokovalo z nekaterimi od preostalih prijateljev. Ali je možnost, da se je vsak rokoval natanko s 5 prijatelji?
2. Kako naj poštar optimalno razvozi pošto v nekem naselju, tako da po nobeni cesti ne bo rabil iti dvakrat, a bo obiskal vse hišne številke vzdolž vseh cest?
3. V učilnicah na izpitih študenti ne smejo sedeti drug poled drugega. Nekateri stoli v učilnici so zlomljeni. Največ koliko študentov lahko v učilnici piše izpit?
4. V nekem mestu bi radi postavili avtobustna postajališča na točno določene točke. Ali lahko načrtujejo avtobusno liniji, ki začne in konča na nekem mestu in vsako od teh točk obišče natanko enkrat?
5. Kartografi bi zemljevid radi pobarvali z čim manj barvami tako, da bosta sosednji državi različnih barv. Koliko barv zadošča za ta namen? Ali je to sploh omejeno za vse zemljevide?

1. Ob sestavljanju urnika za 5 predmetov $A_1, \ldots, A_5$ imamo naslednje omejitve konflikte:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1		X	X		
A_2	X				
A_3	X			X	X
A_4			X		X
A_5			X	X	

Koliko različnih časovnih terminov potrebujemo za izvedbo vseh petih predmetov brez konfliktov?

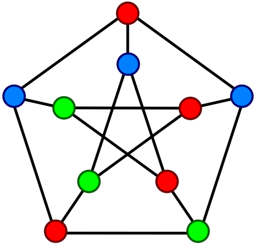
Kaj je graf

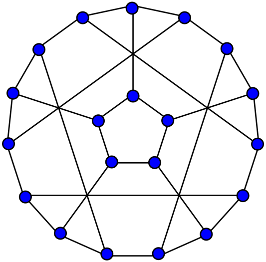
Neusmerjen graf je urejen par $G = (V, E)$, kjer je

- V neprazna končna množica točk (vozlišč) grafa G in
- E množica povezav grafa G, pri čemer je vsaka povezava par točk (povezava je množica dveh različnih točk).

Primer

$V = \{u, v, w, x, y\}$ $\quad$ $E = \{\{u, v\}, \{u, w\}, \{v, w\}, \{v, x\}\}$





Kaj je graf

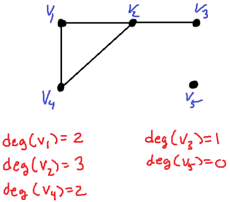
Namesto $e = \{u, v\}$ pišemo krajše $e = uv$ ali $e = vu$. V tem primeru pravimo, da sta točki u in v *krajišči* povezave e, povezava e povezuje točki u in v. Pravimo tudi, da sta u in v *sosednji*, kar označimo z $u \sim v$.

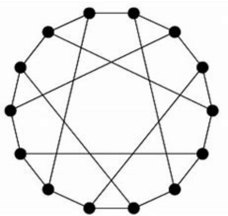
$V = V(G)$ ... množica točk grafa G,
$E = E(G)$ ... množica povezav grafa G

Stopnja točke $v \in V(G)$, $\deg(v)$, je število povezav, ki imajo v za krajišče.

Še nekaj definicij:

- Točka stopnje 0 je *izolirana*, točki stopnje 1 pravimo tudi *list*.
- Graf G je *regularen*, če imajo vse njegove točke isto stopnjo. 3-regularnim grafom pravimo tudi *kubični grafi*.





Lema o rokovanju in grafična zaporedja

Izrek (Lema o rokovanju)

Naj bo G graf z n točkami in m povezavami. Potem je

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2 \cdot m \tag{1}$$

Dokaz.

Ker vsaka povezava nastopi kot krajišče dveh vozlišč, je število povezav natanko $\frac{1}{2}$ vsote stopenj vseh vozlišč. $\square$

Posledica

V vsakem grafu je sodo mnogo točk lihe stopnje.

Dokaz.

Če bi bilo točk lihe stopnje liho, bi bilo leva stran v (1) liha. To pa je v protislovju s sodostjo desne strani. $\square$

Grafično zaporedje

Končno zaporedje naravnih števil

$$d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \ldots \geq d_n$$

je *grafično*, če obstaja graf G z n točkami, ki imajo stopnje enake $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Primer

1. *Zaporedje* $3, 2, 2, 1, 0$ *je grafično.*

   Brez težav najdemo primer ustreznega graf.

2. *Ali je zaporedje* $5, 4, 3, 2, 2, 1$ *grafično?*

   Ne, saj je lihih vozlišč liho mnogo.

3. *Ali je zaporedje* $6, 4, 4, 3, 2, 2, 1$ *grafično?*

   Da. Najnaivnejši poskus risanja grafa deluje.

Izrek

Zaporedje $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \ldots \geq d_n$ je grafično natanko tedaj, ko je tudi zaporedje

$$0, d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n \tag{2}$$

grafično.

Izrek zaporedoma uporabljamo na naslednji način:

- Po vsaki uporabi novo zaporedje uredimo po velikosti do

$$d_1^{(1)} \geq d_2^{(1)} \geq \ldots \geq d_{n-1}^{(1)} \geq 0. \tag{3}$$

- Znova uporabimo zgornji izrek. Zaporedje (3) je grafično natanko tedaj, ko je zaporedje

$$0, d_2^{(1)} - 1, d_3^{(1)} - 1, \ldots, d_{d_1^{(1)}+1} - 1, d_{d_1^{(1)}+2}, \ldots, d_{n-1}^{(1)}, 0. \tag{4}$$

  grafično.
- Če po največ n-korakih pridemo do samih ničel, je zaporedje grafično. Če pa nekega koraka ne moremo izvesti, ker je premalo neničelnih členov, potem zaporedje ni grafično.

Primer

Ali je $5 \geq 4 \geq 3 \geq 2 \geq 2 \geq 1$ *grafično?*

$\Leftrightarrow$ $0, 3, 2, 1, 1, 0$ *je grafično.* *(Uporabimo izrek.)*

$\Leftrightarrow$ $3 \geq 2 \geq 1 \geq 1 \geq 0 \geq 0$ *je grafično.* *(Uredimo po velikosti.)*

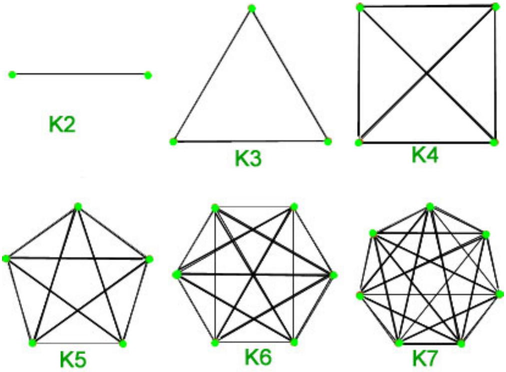
$\Leftrightarrow$ $0, 1, 0, 0, 0$ *je grafično.* *(Uporabimo izrek.)*

$\Leftrightarrow$ $1 \geq 0 \geq 0 \geq 0 \geq 0 \geq 0$ *je grafično.* *(Uredimo po velikosti.)*

Naslednjega koraka ne moremo narediti, kar pomeni, da nobene zaporedje v zgornjih ekvivalencah ni grafično.

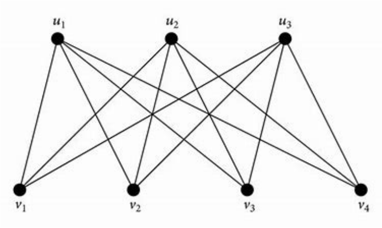
Nekatere družine grafov

Graf je *poln*, če sta vsaki njegovi točki sosedi. Poln graf na n točkah označimo z K_n.

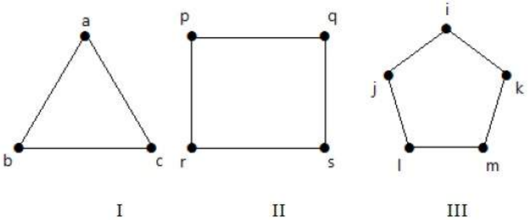


Graf je *prazen*, če nobeni njegovi točki nista sosedi. Prazen graf na n točkah označimo s $\overline{K_n}$.

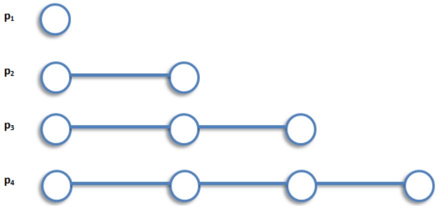
Graf je *polni dvodelni graf* na $n + m$ točkah, če vsebujee dva *barvna razreda* s po n in m točkami, točki sta sosedi natanko tedaj, ko sta v različnih barvnih razredih. Te grafe označujemo z $K_{n,m}$.



Graf je *cikel* na $n \geq 3$ točkah, če je izomorfen grafu krožnici z n vozlišči na obodu. To označimo s C_n.

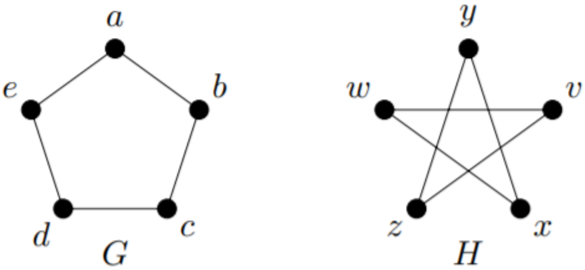


Graf je *pot* na n točkah, če je izomorfen grafu daljici z n vozlišči (poleg krajišč še $n-2$ notranjih točk). To označimo s P_n.



Izomorfizem grafov

Ali sta naslednja grafa kaj v sorodu?



Grafa G_1 in G_2 sta *izomorfna*, če obstaja preslikava

$$f : V(G_1) \to V(G_2),$$

za katero velja:

1. f je bijektivna in
2. $u \sim_{G_1} v \;\Leftrightarrow\; f(u) \sim_{G_2} f(v)$.

V tem primeru pravimo, da je f izomorfizem grafov G_1 in G_2, ter pišemo $G_1 \cong G_2$.

Izomorfizem grafov

Trditev

Izomorfizem ohranja število vozlišč, število povezav, stopnje vozlišč, število trikotnikov, ...

Če grafa nista izomorfna, pravimo, da sta *neizomorfna*.

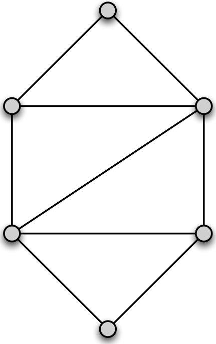
Primer

Grafa s prejšnje strani sta izomrfna. Izomorfizem je $f(a) = y$, $f(b) = x$, $f(c) = w$, $f(d) = v$, $f(e) = z$.

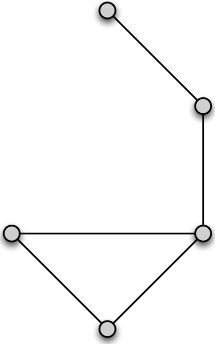
Podgrafi

Naj bosta H in G grafa. Pravimo, da je:

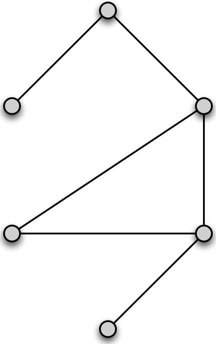
- H *podgraf* grafa G, kar označimo z $H \subseteq G$, če je
  - $V(H) \subseteq V(G)$
  - $E(H) \subseteq E(G)$.
- H *vpet podgraf*, če je podgraf in velja še $V(H) = V(G)$.



Graf G.



$H_1 \subseteq G$



$H_2 \subseteq G$, vpet.