Lastnosti seštevanja vektorjev

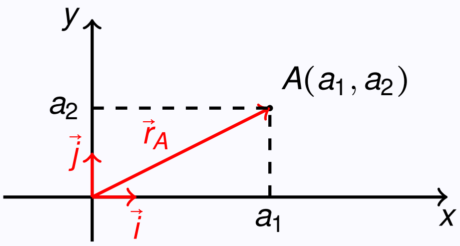
Za seštevanej vektorjev očitno veljajo lastnosti

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$
- Za ničelni vektor $\vec{0} = (0, 0)$ v ravnini in $\vec{0} = (0, 0, 0)$ v prostoru velja
  - $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
  - $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$
- $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Vektorji v ravnini

V ravnini $\mathbb{R}^2$ imamo običajni **koordinatni sistem** s pravokotnima vektorjema $\vec{i} = (1, 0)$ in $\vec{j} = (0, 1)$. S pomočjo vektorjev $\vec{i}$ in $\vec{j}$ lahko izrazimo vse ostale vektorje:

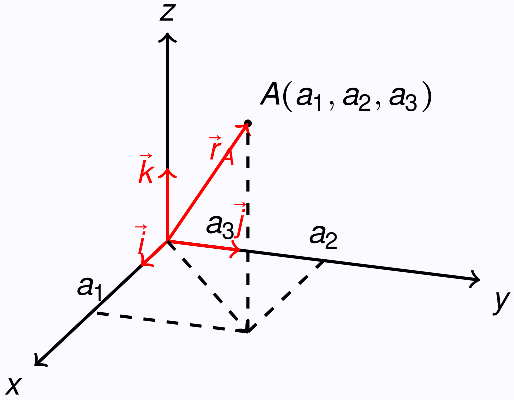
$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1 \cdot (1, 0) + a_2 \cdot (0, 1) = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j}$$



Vektorji v prostoru

V prostoru $\mathbb{R}^3$ imamo običajni **koordinatni sistem** s pravokotnimi vektorji $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ in $\vec{k} = (0, 0, 1)$. S pomočjo vektorjev $\vec{i}$, $\vec{j}$ in $\vec{k}$ lahko izrazimo vse ostale vektorje:

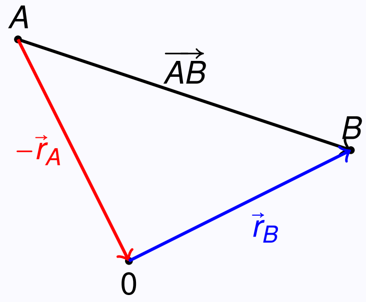
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1) = a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}$$



Vektor med točkama

Vektor $\overrightarrow{AB}$, ki se začne v točki A in konča v točki B določimo

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$



Na primer, za $A = (2, -1, 3)$ in $B = (3, -2, 1)$ je

$$\overrightarrow{AB} = (3, -2, 1) - (2, -1, 3) = (1, -1, -2).$$

Naloge za vajo

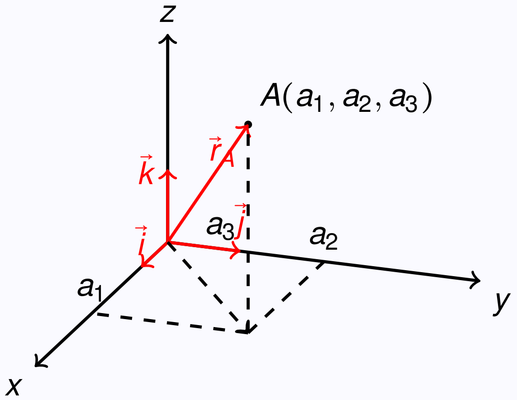
- Zapišimo vektor od $A(1, 2, 3)$ do $B(3, 0, -1)$.
- Zapišimo točko, ki leži točno na sredini med $A(1, 2, 3)$ in $B(3, 0, -1)$.
- Če sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ krajevna vektorja točk A in B, razmislimo, kaj pomeni
  - $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$
  - $\{\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, 0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1\}$
  - $\vec{a} + 3(\vec{b} - \vec{a})$
  - $\vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})$
  - $\{\vec{a} + \alpha(\vec{b} - \vec{a}), \alpha \in \mathbb{R}\}$
  - $\{\vec{a} + \alpha(\vec{b} - \vec{a}), 0 \leq \alpha \leq 1\}$

Dolžina vektorja

Dolžino vektorja $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ označimo z $|\vec{a}|$ (ali tudi z $\|\vec{a}\|$). Velja

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

To sledi iz grafičnega razumevanja pomena vektorja



in Pitagorovega izreka.

Enotski vektor

Vektorju, katerega dolžina je enaka 1, pravimo **enotski** (ali **normiran**) vektor.

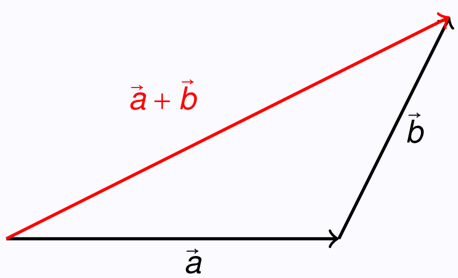
Primer: Vektor $\vec{n}_a = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ je enotski vektor, ki ima isto smer kot vektor $\vec{a} = (1, -1, 1)$. Rečemo tudi, da je $\vec{n}_a$ enotski vektor vektorja $\vec{a}$.

Trikotniška neenakost

Za poljubna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ velja (**trikotniška neenakost**)

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|,$$

Trikotniška neenakost sledi iz razumevanja grafičnega pomena vsote dveh vektorjev:



Kolinearnost, komplanarnost in linearna kombinacija vektorjev

- Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta **kolinearna** (ali **vzporedna**), če obstajata taki števili (skalarja) α in β, da velja
$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = 0.$$
- Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ so **komplanarni** (ali **ležijo v isti ravnini**), če obstajajo taka števila (skalarji) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ da velja
$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0.$$
- Če so $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ in $\vec{a}_3$ vektorji iz prostora $\mathbb{R}^3$ in $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ skalarji, je vektor
$$\vec{c} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3$$
linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ in $\vec{a}_3$.

Primer

- Vektor $3 \cdot (1,1,1) - 2 \cdot (1,0,2) = (1,3,-1)$ je linearna kombinacija vektorjev $(1,1,1)$ in $(1,0,2)$.
- Vektor $(3,-2,4) = 3 \cdot (1,0,0) - 2 \cdot (0,1,0) + 4(0,0,1)$ je linearna kombinacija vektorjev $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ in $\vec{k} = (0,0,1)$.

Nelinearni in nekomplanarni vektorji

- Če sta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ **nekolinearna vektorja**, lahko vsak vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^2$ zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
- Če so $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ **nekomplanarni vektorji**, lahko vsak vektor $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$ zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.

Skalarni produkt

- Za vektorja $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ bomo število (skalar) $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ zapisali na kratko kot 'produkt vektorjev'
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$
in ga imenovali **skalarni produkt** vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
- Izkaže se, da če z φ označimo kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$, velja enakost
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$
- Skalarni produkt veliko pove o vektorjih. Namreč, za pravokotna si vektorja je njun skalarni produkt enak nič.

Lastnosti skalarnega produkta

- $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$
- $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$
- $\vec{a}\cdot(\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\alpha\vec{a})\cdot\vec{b}$
- $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$ in $\vec{a}\cdot\vec{a} = 0$ le za $\vec{a} = \vec{0}$.
- $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$ ali $\vec{a} = 0$ ali $\vec{b} = 0$

Primer

Izračunajmo skalarni produkt vektorjev $\vec{a} = (2, -1, 3)$ in $\vec{b} = (1, 5, 1)$.

Dobimo $\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot 1 - 1\cdot 5 + 3\cdot 1 = 0$. Sklepamo lahko, da sta si vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ pravokotna.

Kot med vektorjema

S pomočjo skalarnega produkta lahko določimo **kot** φ med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Kot φ je določen s formulo

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Kot med vektorjema - primer

- Določimo kot med robom in telesno diagonalo kocke.

  V kocki z robom 1, ki jo postavimo v običajni koordinatni sistem, je rob določen z vektorjem $\vec{a} = (1, 0, 0)$, telesna diagonala pa z vektorjem $\vec{d} = (1, 1, 1)$. Kot med vektorjema izračunamo po formuli

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{d}|} = \frac{(1,0,0)\cdot(1,1,1)}{|(1,0,0)|\cdot|(1,1,1)|} = \frac{1}{1\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3} = 0.9553^{rd} = 54.74^{o}$$

Vektorski produkt

Za vektorja $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ in $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ bomo vektor $(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ zapisali

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

in ga imenovali **vektorski produkt** vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

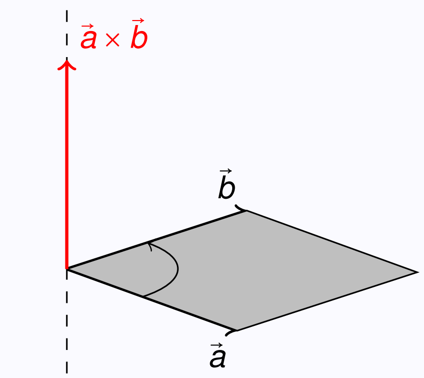
Formulo si zapomnimo po 'geometrijski shemi'

$$\begin{array}{cccccc} (a_1, & a_2, & a_3) & (a_1, & a_2, & a_3) \\ (b_1, & b_2, & b_3) & (b_1, & b_2, & b_3) \end{array}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

Lastnosti vektorskega produkta

- Vektorski produkt $\vec{a} \times \vec{b}$ je pravokoten na oba vektorja, $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
- Smer je določena s 'pravilom desnega vijaka'.



- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times b + \vec{a} \times \vec{c}$
- $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b} = \alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\alpha\vec{b})$
- $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$, kjer je φ kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
- $|\vec{a} \times \vec{b}|$ je ploščina paralelograma določenega z $\vec{a}$ in $\vec{b}$.
- Za neničelna vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ velja, da $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ natanko takrat, kadar sta vektorja kolinearna (kot φ med vektorjema je enak 0).

Naloge za vajo

- Izračunajmo vektorske produkte

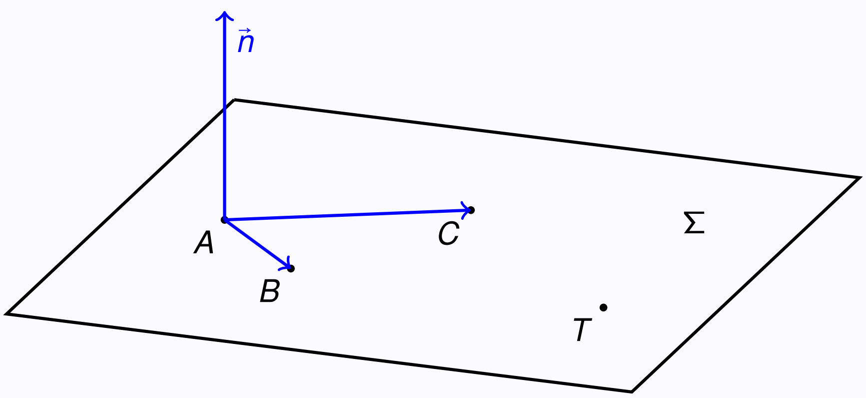
$\vec{i} \times \vec{j} =$	in	$\vec{j} \times \vec{i} =$
$\vec{j} \times \vec{k} =$	in	$\vec{k} \times \vec{j} =$
$\vec{k} \times \vec{i} =$	in	$\vec{i} \times \vec{k} =$

- Izračunajmo ploščino paralelograma, določenega z vektorjema $\vec{a} = (2, 1, -3)$ in $\vec{b} = (-2, 0, 4)$
- Izračunajmo ploščino trikotnika z oglišči $A\,(1, -1, 0)$, $B\,(2, 1, -1)$ in $C\,(-1, 1, 2)$.

Ravnina v prostoru

- Ravnina je določena s tremi točkami A, B in C ali
- Ravnina je določena s točko A in normalo $\vec{n}$ (vektorjem, ki je pravokoten na ravnino).

Če je ravnina Σ določena s točkami A, B, C, je normala ravnine $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.



Za poljubno točko $T(x, y, z) \in \Sigma$ velja $\overrightarrow{AT} \cdot \vec{n} = 0$. Če je normala $\vec{n} = (a, b, c)$ in točka $A = (a_1, a_2, a_3)$ dobimo enačbo ravnine Σ:

$$ax + by + cz = d$$

pri čemer je $d = aa_1 + ba_2 + ca_3$.

Primer

Določimo enačbo ravnine, ki gre skozi točke $A(1,0,1)$, $B(3,2,1)$ in $C(-2,3,2)$.

- Izračunamo $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (2,2,0) \times (-3,3,1) = (2,-2,12)$.
- Če je $T = (x,y,z)$ poljubna točka na ravnini je $\vec{AT} = (x-1, y, z-1)$ vektor, ki je pravokoten na normalo $\vec{n}$.
- Torej $\vec{AT} \cdot \vec{n} = 0$. Dobimo

$$(x-1, y, z-1) \cdot (2,-2,12) = 0$$

in enačbo ravnine

$$2x - 2y + 12z = 14$$

$$x - y + 6z = 7$$

Premica v prostoru

Premica je določena s točko in smerjo. Za premico, ki gre skozi točko $A(a,b,c)$ in ima smer $\vec{e} = (m,n,o)$ velja, da so vse točke $T(x,y,z)$ na premici oblike

$$\vec{r}_T = \vec{r}_A + t \cdot \vec{e}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

oziroma

$$(x,y,z) = (a,b,c) + t \cdot (m,n,o)$$

ali zapisano po komponentah

$$\begin{aligned} x &= a + t \cdot m \\ y &= b + t \cdot n \\ z &= c + t \cdot o \end{aligned}$$

Če zapišemo tri enačbe po komponentah in izenačimo vrednosti za t, dobimo enačbo premice v obliki

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{o}.$$

Primer

Določimo premico skozi točko $A(1,2,3)$ s smerjo $\vec{e} = (1,0,2)$.

- Zapišemo
$$(x,y,z) = (1,2,3) + t \cdot (1,0,2)$$
- Ali zapisano po komponentah
$$\begin{aligned} x &= 1 + t \cdot 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 + t \cdot 2 \end{aligned}$$
- Oziroma
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{2}.$$
- Pri zadnjem zapisu velja pripomniti, da ne gre za deljenje z 0 ampak za zapis enačbe premice, ki ga je potrebno razumeti.

Naloga

Dane so točke $A(1,2,0)$, $B(-1,1,2)$ in $C(1,1,0)$ ter točka $T(1,1,1)$. Točke A, B, C določajo ravnino Ω. Poiščimo točko, ki je glede na ravnino Ω zrcalna točki T.