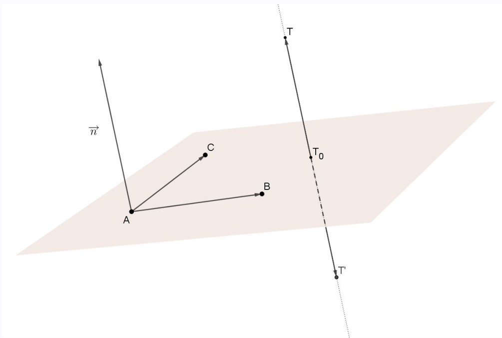
Naloga

Dane so točke $A(1,2,0)$, $B(-1,1,2)$ in $C(1,1,0)$ ter točka $T(1,1,1)$. Točke A, B, C določajo ravnino Ω. Poiščimo točko, ki je glede na ravnino Ω zrcalna točki T.

- Normala ravnine je $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Torej $\vec{n} = (-2,-1,2) \times (0,-1,0) = (2,0,2)$. Za normalo lahko vzamemo $\vec{n} = (1,0,1)$.
- Ravnina Ω je podana z enačbo $[(x,y,z) - (1,2,0)] \cdot (1,0,1) = 0$, torej z enačbo $x + z = 1$.



- Premica skozi točko $T(1,1,1)$ s smerjo (normale ravnine) $\vec{n} = (1,0,1)$ je podana z enačbami $x = 1 + t$, $y = 1$ in $z = 1 + t$.
- Ta premica seka ravnino Ω v točki, ki je določena z enačbami $x + z = 1$, $x = 1 + t$, $y = 1$ in $z = 1 + t$. Dobimo $(1 + t) + (1 + t) = 1$ in $t = -\frac{1}{2}$. Presečišče premice in ravnine je torej točka $T_0(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$.
- Točki T zrcalna točka bo zato $T' = T_0 - \overrightarrow{T_0T} = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) - (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) = (0,1,0)$.

Sistemi linearnih enačb

Kaj so sistemi linearnih enačb?

- Najpreprostejši sistem linearnih enačb je sistem ene enačbe z eno neznanko. Na primer $x + 1 = 2$, ki ga enostavneje zapišemo kot $x = 1$.
- Že precej bolj zapleten je sistem dveh enačb z dvema neznankama. Na primer

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & 1 \end{array}$$

  Tak sistem lahko rešimo na več načinov.
  - Tako da na primer iz prve enačbe izrazimo spremenljivko y in jo vstavimo v drugo enačbo: $y = 3 - x \longrightarrow x - (3 - x) = 1$. Rešimo enačbo za x in rešitev vstavimo v eno izmed prvotnih enačb, ter izračunamo še y: $x - (3 - x) = 1 \longrightarrow 2x = 4 \longrightarrow x = 2 \longrightarrow 2 + y = 3 \longrightarrow y = 1$.
  - Ali z ustreznim množenjem ene ali obeh enačb ter odštevanjem ali seštevanjem levih in desnih strani enačb:

$$\begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 3 \\ x & - & y & = & 1 \\ \hline 2x & & & = & 4 \end{array}$$

    Torej $x = 2$ in iz prve enačbe $y = 1$.
- Pri še bolj zapletenih (večjih) sistemih enačb, za reševanje uporabimo drugega izmed zgornjih načinov, ki ga bomo v nadaljevanju natančneje opisali.

Zakaj govorimo o **linearnih** sistemih enačb?

Da je sistem 'linearen' pomeni, da vse spremenljivke nastopajo 'linearno', to je v 'prvi potenci'. Na primer

$$\begin{aligned} x + y^2 &= 3 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

ni linearen sistem enačb, ker v prvi enačbi nastopa y^2.

Nelinearne sisteme enačb je težje obravnavati.

Sistem treh linearnih enačb s tremi neznankami

Sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ -x + y + z &= 0 \\ 2x + y - z &= -3 \end{aligned}$$

bomo zapisali krajše (rečemo, da ga napišemo z matriko)

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

Gaussov postopek reševanja linearnega sistema enačb - Gaussova eliminacija

Pravimo, da sta dva sistema enačb **ekvivalentna**, če imata enake rešitve. Sistem rešujemo tako, da ga zamenjujemo z ekvivalentnimi sistemi, dokler ne dobimo sistema, ki ga je zelo enostavno rešiti, oziroma je že rešen.

Ekvivalentni sistemi

Ekvivalentni sistem linearnih enačb dobimo tako, da

- Med seboj lahko zamenjamo dve enačbi.
- Posamezni enačbi lahko prištejemo večkratnik druge enačbe.
- Enačbo lahko pomnožimo s številom $a \neq 0$.

V zapisu z matriko to pomeni:

- Med seboj lahko zamenjamo dve vrstici.
- Posamezni vrstici lahko prištejemo večkratnik druge vrstice.
- Vrstico lahko pomnožimo s številom $a \neq 0$.

Postopek Gaussove eliminacije na konkretnem primeru

Sistem linearnih enačb

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & -3 \end{array} \quad \text{zapišemo z matriko} \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right]$$

Drugi vrstici prištejemo prvo. Tretji vrstici odštejemo dvakratnik prve vrstice. Drugo vrstico delimo z 2 in prištejemo tretji.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Tretjo vrstico delimo z -2 in odštejemo od prve in druge vrstice. Drugo vrstico odštejemo od prve.

In le še preberemo rešitve $x = 1$, $y = -2$ in $z = 3$.

Vaja 1

Rešimo sistem:

$$\begin{aligned} -x + y + 2z &= 3 \\ x - 2y - 3z &= 0 \\ 2y + z &= -8 \end{aligned}$$

Dobimo

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Torej $x = -4$, $y = -5$ in $z = 2$.

Izračun sistema

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Vaja 2

Rešimo sistem:

$$\begin{aligned} x + 2y + 5z + u &= 4 \\ 3x - 4y + 3z - 2u &= 7 \\ 4x + 3y + 2z - u &= 1 \\ x - 2y - 4z - u &= 2 \end{aligned}$$

Dobimo

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 3 & -2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Torej $x = 3$, $y = -2$, $z = 0$ in $u = 5$.

Izračun sistema

$$
\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 3 & -4 & 3 & -2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & -1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 10 & 12 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 18 & 5 & 15 \\ 0 & 4 & 9 & 2 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 3 & 13 \\ 0 & 10 & 12 & 5 & 15 \\ 0 & 10 & 36 & 10 & 30 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 24 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 54 & 20 & 100 \end{array}\right] \longrightarrow
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 24 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 30 & 15 & 75 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 24 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 6 & 10 & 50 \end{array}\right] \longrightarrow
$$

Izračun sistema

$$
\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 35 & 175 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow
$$

$$
\longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]
$$

Vaja 3

Rešimo sistem:

$$\begin{aligned} x + 2y + 2z &= 3 \\ 2y + 2z &= 2 \\ 2x + y + z &= 4 \end{aligned}$$

Dobimo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Zadnja vrstica pomeni $0 = 1$. To ni mogoče. Zaključimo: **Sistem ni rešljiv!** ali **sistem nima nobene rešitve!**

Izračun sistema

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Nerešljivi linearni sistemi

Torej obstajajo tudi sistemi, ki niso rešljivi. Rečemo tudi, da je tak sistem protisloven. Enostaven primer takega sistema je

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

Vaja 4

Rešimo sistem:

$$\begin{array}{lllll} x & +y & +z & +u & = 3 \\ x & -y & +z & +u & = -1 \\ x & +y & +3z & +3u & = 3 \\ x & +9y & +z & +u & = 19 \end{array}$$

Dobimo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 1 & 1 & 19 \end{array}\right] \longrightarrow \ldots \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Torej $x = 1$, $y = 2$, $z = -u$. Dobimo neskončno rešitev. Za vsako število t je četvorka $(1, 2, t, -t)$ rešitev sistema naših enačb.

Izračun sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 1 & 1 & 19 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 16 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Vaja 5

Podobno bi za sistem:

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ 3x - y + 3z - u &= 2 \\ x + y + z + u &= 2 \\ x + y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

dobili neskončno rešitev. Vsaka četvorka oblike $(t, 1 + t, 1 - t, -t)$, kjer lahko za t izberemo poljubno število, je rešitev tega sistema enačb.

Izračun sistema

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Linearni sistemi z več rešitvami

Torej obstajajo tudi sistemi, ki imajo več rešitev. Enostaven primer takega sistema je

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ x+y &= 1 \end{aligned}$$

Ker sta obe enačbi ekvivalentni imamo eno samo bistveno enačbo $x + y = 1$. Rešitev tega sistema (enačbe) je neskončno mnogo. Sistem reši vsak par števil $(t, 1 - t)$, kjer je t poljubno število.

Kaj lahko povemo o rešitvah sistema linearnih enačb?

Pri rešitvah sistema linearnih enačb torej lahko nastopijo tri različne možnosti:

- Sistem ima enolično (točno določeno) rešitev.
- Sistem nima rešitev.
- Sistem ima neskončno rešitev.

Primer uporabe linearnega sistema enačb

Na razpolago imamo spojine L_1, L_2, L_3, L_4, ki so sestavljene iz čistih snovi M_1, M_2, M_3, M_4 in za katere velja:

$$\begin{aligned} L_1 &\text{ je kar čista snov } M_1 \\ L_2 &\text{ je mešanica 50\% snovi } M_1 \text{ in 50\% snovi } M_2 \\ L_3 &\text{ je mešanica 50\% snovi } M_2 \text{ in 50\% snovi } M_3 \\ L_4 &\text{ je mešanica 50\% snovi } M_3 \text{ in 50\% snovi } M_4. \end{aligned}$$

- Kako bi zmešali spojino, ki bo vsebovala vse štiri čiste snovi v enakih koncentracijah ?

Če zmešamo

$$\begin{aligned} x &\text{ litrov spojine } L_1 \\ y &\text{ litrov spojine } L_2 \\ z &\text{ litrov spojine } L_3 \\ u &\text{ litrov spojine } L_4 \end{aligned}$$

dobimo mešanico

$$x \cdot M_1 + y \cdot (\frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2) + z \cdot (\frac{1}{2}M_2 + \frac{1}{2}M_3) + u \cdot (\frac{1}{2}M_3 + \frac{1}{2}M_4).$$

Primer uporabe - nadaljevanje

Mešanica

$$x \cdot M_1 + y \cdot (\frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{2}M_2) + z \cdot (\frac{1}{2}M_2 + \frac{1}{2}M_3) + u \cdot (\frac{1}{2}M_3 + \frac{1}{2}M_4)$$

vsebuje

$$\begin{array}{llllll} x + \frac{1}{2}y & \text{litrov spojine} & M_1, & & \frac{y+z}{2} & \text{litrov spojine} & M_2, \\ \frac{z+u}{2} & \text{litrov spojine} & M_3 & \text{in} & \frac{u}{2} & \text{litrov spojine} & M_4. \end{array}$$

Če naj bodo te količine enake (enake npr. 1), dobimo sistem enačb

$$\begin{aligned} x + \tfrac{1}{2}y &= 1 \\ \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}z &= 1 \\ \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}u &= 1 \\ \tfrac{1}{2}u &= 1 \end{aligned} \qquad \text{zapisano z matriko} \qquad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

Primer uporabe - nadaljevanje

Rešimo sistem:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \dots \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Rešitve so torej $x = 0, y = 2, z = 0, u = 2$. Zmešamo torej 2 (litra) spojine L_2 in 2 (litra) spojine L_4. Preverimo, kakšno spojino dobimo:

$$\begin{aligned} 2 \cdot L_2 + 2 \cdot L_4 &= 2 \cdot (\tfrac{1}{2}M_1 + \tfrac{1}{2}M_2) + 2 \cdot (\tfrac{1}{2}M_3 + \tfrac{1}{2}M_4) = \\ &= M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \end{aligned}$$

Dobili smo torej 4 litre spojine v kateri je po en liter vsake izmed čistih spojin M_1, M_2, M_3, M_4.

Razumevanje in povezovanje vsebin

Poglavja in vsebine, ki smo jih obravnavali so zelo povezana.

- Linearni sistem

$$x + y = 1$$
$$x - y = 1$$

  bi rešili

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \dots \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

  in dobili rešitev $x = 1$ in $y = 0$.
- Isto rešitev bi dobili, če enačbi $x + y = 1$ in $x - y = 1$ razumemo kot premici $y = -x + 1$ in $y = x - 1$. Rešitev je presečišče premic, to je točka $(1, 0)$.

Razumevanje in povezovanje vsebin 2

- Podobno bi dobili rešitev linearnega sistema

$$\begin{array}{rrrl} x & +y & -z & = 1 \\ x & -y & +z & = 1 \\ x & +3y & -3z & = 1 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \dots \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

  Torej dobimo neskončno rešitev, oziroma $x = 1$ in $y = z$. Poljubna rešitev sistema je torej oblike $(x, y, z) = (1, t, t)$, kjer je t poljubno število.
- Po drugi strani, če enačbo $x + y - z = 1$ razumemo kot ravnino skozi točko $(1, 0, 0)$ z normalo $\vec{n} = (1, 1, -1)$ in enačbo $x - y + z = 1$ kot ravnino skozi točko $(1, 0, 0)$ z normalo $\vec{n} = (1, -1, 1)$, bo presečišče teh dveh ravnin premica skozi točko $(1, 0, 0)$ s smerjo

$$\vec{s} = (1, 1, -1) \times (1, -1, 1) = (0, -2, -2).$$

  Torej premica skozi točko $(1, 0, 0)$ s smerjo $\vec{s} = (0, 1, 1)$. To pa je ravno množica vseh točk $(x, y, z) = (1, t, t)$. Isto premico bi dobili tudi če bi izračunali presečišče ravnin določenih s prvo in zadnjo enačbo ali z drugo in zadnjo enačbo.

Razumevanje in povezovanje vsebin 3

- Če pa bi reševali sistem

$$\begin{array}{rcl} x+y-z&=&1\\ x-y+z&=&1\\ x+y+z&=&3 \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow \dots \longrightarrow \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

  bi dobili rešitev $x = 1$, $y = 1$ in $z = 1$.
- Po prejšnjem razmisleku vemo, da preseku prvih dveh enačb (ravnin) ustreza premica $(x, y, z) = (1, t, t)$. Presek te premice z zadnjo enačbo (ravnino) $x + y + z = 3$ pa izračunamo iz enačbe $1 + t + t = 3$ in dobimo $t = 1$ ter presečišče $(1, 1, 1)$, kar ustreza prej dobljeni rešitvi.

Uporabnost linearnih sistemov enačb

Linearni sistemi enačb in njihovo reševanje je zelo uporabno področje matematike. Računsko reševanje takih sistemov je sicer rutinsko in v današnjem času opravljeno z računalniki. (Na primer: http://ko.fmf.uni-lj.si/po/ZF/redirect.html). Je pa za uspešno uporabo računalnikov nujno razumevanje linearnih sistemov enačb in njihovega reševanja.

Linearni sistemi in linearno programiranje

S pomočjo **linearnih sistemov enačb (in neenačb)** rešujemo tudi mnoge druge probleme. V nadaljevanju opisani problemi in način reševanja spadajo v poglavje tako imenovanega **linearnega programiranja**.

Naloga: Na zalogi imamo 15 kg preparata P1 in 24 kg preparata P2. Iz teh dveh preparatov mešamo 'čistila' v paketih po 200 g. Pri zavojčkih 'Normal', v katere zmešamo po 50 g preparata P1 in 150 g preparata P2, imamo po 2,50 EUR dobička na zavojček. Nekoliko kvalitetnejši zavojčki 'Extra', v katere zmešamo po 100 g preparata P1 in 100 g preparata P2, pa prinašajo po 4,50 EUR dobička na zavojček. Zanima nas, kako naj zapakiramo zalogo preparatov P1 in P2, da bo dobiček čim večji.

Ureditev podatkov

Uredimo podatke

	Normal	Extra	Zaloga
$P1$	50	100	15 000
$P2$	150	100	24 000
Dobiček	2,5	4,5	
	x	y	

pri čemer smo količine pisali v gramih, neznano število zapakiranih paketov 'Normal', oziroma 'Extra' pa smo označili s spremenljivkama x in y.

Naloga - nadaljevanje

Podatke iz tabele zapišemo matematično s pogoji:

	Normal	Extra	Zaloga
$P1$	50	100	15 000
$P2$	150	100	24 000
Dobiček	2, 5	4, 5	
	x	y	

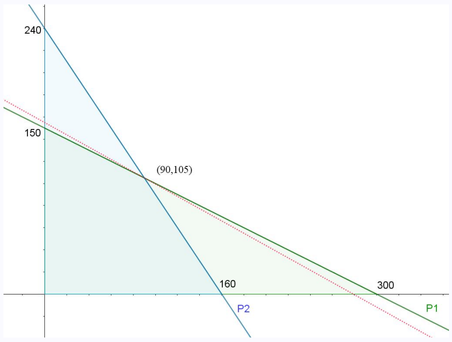
$\longrightarrow$

$$P1: 50x + 100y \leq 15\,000$$
$$P2: 150x + 100y \leq 24\,000$$
$$\text{Dobiček} = 2,5x + 4,5y$$

Poenostavimo:

$$P1: y \leq 150 - \frac{1}{2}x$$
$$P2: y \leq 240 - \frac{3}{2}x$$
$$y = \frac{Dob}{4{,}5} - \frac{5}{9}x$$

in skiciramo.



Področje, ki je pod obema premicama je 'dopustno območje'. Vsaka točka (x, y) na tem območju pomeni količino paketov Normal (x) in Extra (y), ki jih glede na zalogo lahko zapakiramo. Premica dobička (rdeča) zaradi smernega koeficienta $\frac{5}{9}$ določa največji dobiček v točki $(90, 105)$, ki je enak $90 \cdot 2,5 + 105 \cdot 4,5 = 697,5$. Pri podobnih nalogah je maksimum vedno dosežen v eni izmed vogalnih točk 'dopustnega območja'.