Diskretne strukture

Trinajsti sklop izročkov

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

6. januar 2022

Barvanje grafov

Spomnimo se vprašanj:

- *Kartografi bi zemljevid radi pobarvali z čim manj barvami tako, da bosta sosednji državi različnih barv. Koliko barv zadošča za ta namen? Ali je to sploh omejeno za vse zemljevide?*
- *Ob sestavljanju urnika za 5 predmetov* $A_1, \ldots, A_5$ *imamo naslednje omejitve konflikte:*

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1		X	X		
A_2	X				
A_3	X			X	X
A_4			X		X
A_5			X	X	

Koliko različnih časovnih terminov potrebujemo za izvedbo vseh petih predmetov brez konfliktov?

V jeziku teorije grafov bi zgornji vprašanji lahko formulirali tako, da vsaki državi (oz. predmetu) priredimo vozlišče grafa, vozlišči pa povežemo, če je med njima skupna meja (oz. konflikt). Zanima nas, koliko barv potrebujemo za barvanje vozlišč, da nobeni sosedi ne bosta iste barve.

Definicija

k-barvanje točk grafa G je preslikava

$$c : V(G) \to \{1, 2, 3, \ldots, k\},$$

za katero velja, da je $c(u) \neq c(v)$ za vsako povezavo $uv \in E(G)$.

To pomeni, da morata biti krajišči vsake povezave različnih barv.

Najmanjše naravno število k, za katerega obstaja k-barvanje točk grafa G, imenujemo *kromatično število grafa G* in ga označimo s $\chi(G)$.

Primer

1. $\chi(G) \leq |V(G)|$
2. $\chi(G) \leq 2 \iff G \textit{ dvodelen}$
3. $\chi(K_n) = n$, $\chi(\overline{K_n}) = 1$
4. $\chi(K_{m,n}) = 2$
5. $\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \textit{ sod}, \\ 3, & n \textit{ lih}. \end{cases}$

Velikost največje klike

Z $\omega(G)$ označimo velikost največjega *polnega podgrafa* v G.

Velja $\omega(G) \leq 2$ natanko tedaj, ko je G brez trikotnikov.

$\Delta(G)$ označuje največjo stopnjo točke v grafu G.

Izrek

$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Dokaz.

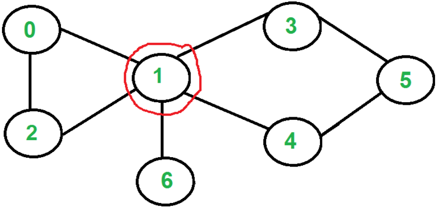
Ker za barvanje največje klike v grafu rabimo vsaj toliko barv, kot ima ta klika točk, je neenakost $\omega(G) \leq \chi(G)$ očitna.

Res pa lahko vsak graf pobarvamo z največ $\Delta(G) + 1$ barv. Vozlišča namreč uredimo v nek vrstni red in barvamo zaporedoma po tem vrstnem redu, tako da vsako vozlišče pobarvamo z eno od barv, s katero niso pobarvani sosedi. Ker ima vsako vozlišče največ $\Delta(G)$ sosedov, bo pri barvanju vozlišča vsaj ena barva prosta. Tako lahko res pobarvamo vsa vozlišča. $\square$

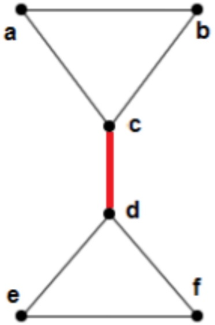
Prerezne točke in povezave

$v \in V(G)$ je *prerezna točka* grafa G, če ima $G - v$ strogo več povezanih komponent kot G.

$e \in E(G)$ je *prerezna povezava* grafa G, če ima $G - e$ strogo več povezanih komponent kot G.



Articulation Point is 1



Prerezne točke in povezave

Trditev

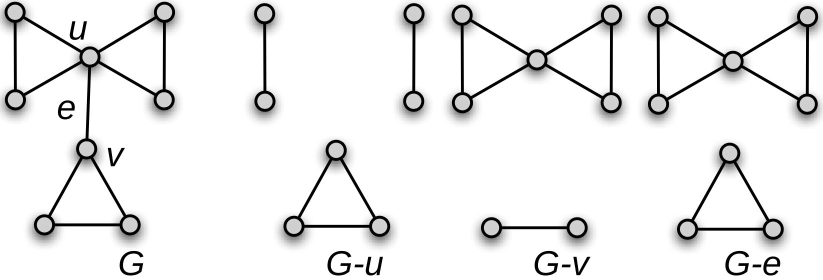
$e \in E(G)$ je prerezna povezava natanko tedaj, ko e ne leži na nobenem ciklu v grafu G.

Dokaz.

Preprost premislek pokaže, da so naslednje trditve za povezavo $e = uv$ enakovredne:

1. Povezava e je prerezna.
2. Vozlišči u in v ležita v različnih komponentah grafa $G - e$.
3. Med vozliščema u in v obstaja samo ena pot v grafu G.
4. Vozlišči u in v ne ležita na nobenem ciklu.

□



u in v sta prerezni točki v grafu G, e je prerezna povezava.

Zgornjo mejo kromatičnega števila lahko še malo zmanjšamo, je pa dokaz precej daljši. (V dokazu nastopajo prerezne točke, zato smo te definicije navedli na tem mestu.) Navedli bomo samo algoritem, ne pa dokaza njegove pravilnosti.

Izrek (Brooks)

Naj bo G povezan graf. Če G ni niti lih cikel niti poln graf, potem je $\chi(G) \leq \Delta(G)$

Algoritem.
Primer 1. $\Delta(G) = 2$. V tem primeru je G sod cikel ali pot na vsaj 3 točkah. Oba sta 2–obarvljiva in $\xi(G) = \Delta(G) = 2$.

Primer 2. $\Delta(G) > 2$.
Naj bo x točka in $\mathcal{Z}_x$ zaporedje točk iz $V(G)$ urejeno glede na padajočo razdaljo do točke x. Torej

$$\mathcal{Z}_x = v_1, v_2, \ldots, v_k, x.$$

To zaporedje barvamo s požrešno metodo od leve proti desni (tj. točko pobarvamo s prvo prosto barvo iz množice $\{1, \ldots, \Delta(G)\}$. Vse točke $v_1, \ldots, v_k$ bodo imele vsaj enega soseda desno v zaporedju, zato bo vsaj ena barva pri barvanju vozlišča v_i prosta. Morda pa ne bomo mogli pobarvati x.

Primer 2.1. Če obstaja točka x_0, za katero velja $\deg(x_0) < \Delta(G)$, potem se bo barvanje $\mathcal{Z}_{x_0}$ z $\Delta(G)$ barvami izšlo.

Primer 2.2. Sicer imajo vse točke stopnjo enako $\Delta(G)$.

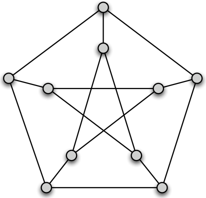
Primer 2.2.1. Če ima G prerezno točko, potem vsako komponento grafa $G - v$ pobarvamo z $\Delta(G)$ barvami, pri čemer je prerezna točka v vseh komponentah iste barve.

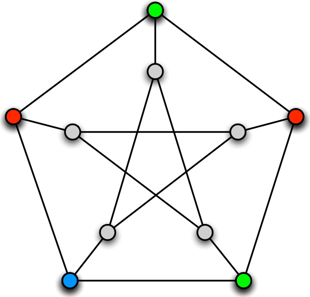
Primer 2.2.2. Če G nima prerezne točke, potem poiščemo vozlišča x, y, z, da velja $xy, xz \in E(G)$, $yz \notin E(G)$ in $G - y - z$ je povezan. Potem zgradimo zaporedje $\mathcal{Z}'_x$ točk iz $V(G) \setminus \{y, z\}$ urejeno glede na padajočo razdaljo do točke x

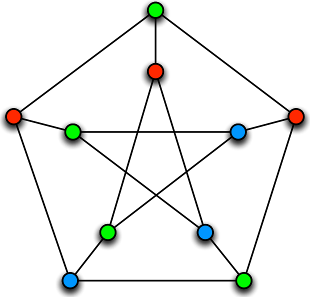
$$\mathcal{Z}'_x = v_1, v_2, \ldots, v_k, x.$$

Pobarvamo y, z z isto barvo, $\mathcal{Z}'_x$ s požrešno metodo, pri čemer bomo tudi x lahko pobarvali, saj sta y, z njegova soseda, pobarvana z isto barvo.

Petersenov graf



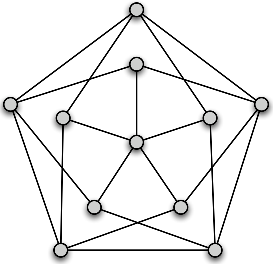


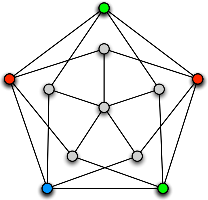


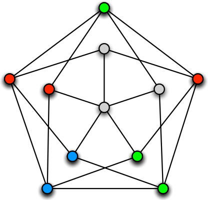
Kolikšno je njegovo kromatično število?

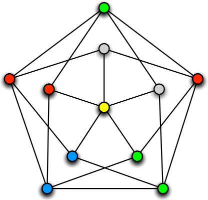
`https://www.youtube.com/watch?v=wiqS4ReuGGk`

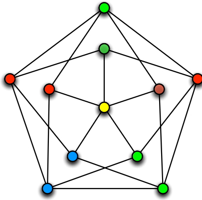
Grötzschev graf









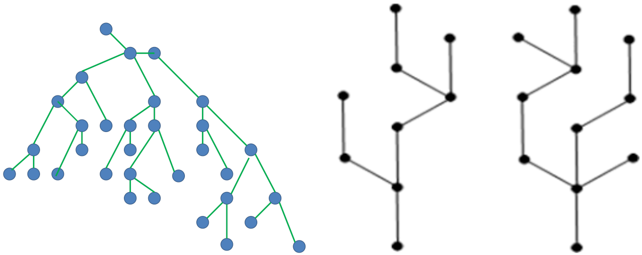


Kolikšno je njegovo kromatično število?

`https://www.youtube.com/watch?v=wiqS4ReuGGk`

Drevesa in gozdovi

Drevo je povezan graf brez ciklov. *Gozd* je graf brez ciklov.



Trditev

G je gozd $\iff$ povezane komponente G so drevesa.
G je drevo $\iff$ G je povezan gozd.

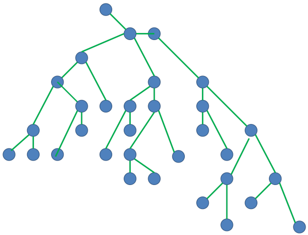
Primer

Grafi P_n in $K_{1,n}$ so drevesa.

Lastnosti dreves

Naj bo T drevo z n točkami in m povezavami.

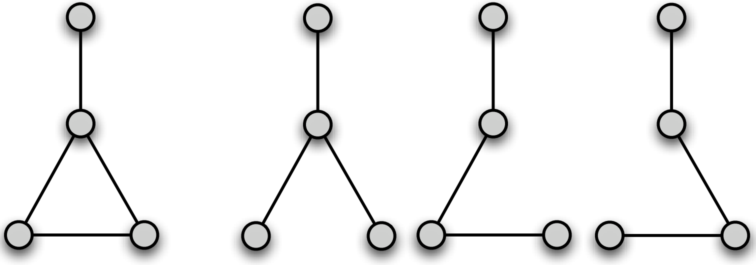
1. T je povezan graf.
2. T je brez ciklov.
3. $m = n - 1$. *Dokaz z indukcijo.*
4. Vsaka povezava v T je prerezna.
5. Za poljubni točki $u, v \in V(T)$ obstaja natančno ena $u - v$ pot v T.
6. Če drevesu T dodamo katerokoli novo povezavo, vsebuje dobljeni graf natanko en cikel.



Vpeto drevo

Naj bo G graf in $H \subseteq G$. H je *vpeto drevo* v G, če je

- H vpet podgraf v G in
- H drevo.



Graf G in vsa njegova vpeta drevesa.

Lastnosti

Izrek

G je povezan $\iff$ G ima vsaj eno vpeto drevo.

Ideja dokaza: Induktivno odstranjujemo povezave na ciklih, dokler ciklov ne zmanjka.

Trditev

Če je T drevo in $|V(T)| \geq 2$, potem ima T vsaj dva lista.

Dokaz.

Število povezav $m = n - 1$, kjer je n število vozlišč. Zato je po lemi o rokavnju $\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = 2(n-1)$. Če je največ 1 vozlišče stopnje 1, potem je $\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) \geq 1 + 2(n-1) > 2(n-1)$. To je protislovje. Torej morata imeti vsaj dve vozlišči stopnjo 1 in sta lista. Seveda vozlišč stopnje 0 nimamo, ker je graf povezan. $\square$

Posledica

Če je G povezan in $|V(G)| \geq 2$, potem vsebuje G vsaj dve točki, ki nista prerezni.