Drugi poskusni kolokvij

1. **[25 točk]** Naj bo U univerzalna množica, A, B, C pa njene podmnožice. V jeziku predikatnega računa vsebovanost $A \subseteq B$ izrazimo z izjavno formulo

$$\forall x \in U : (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

V jeziku predikatnega računa izrazite še naslednje trditve, pri čemer lahko poleg izjavnih veznikov in kvantifikatorjev uporabljate še $\in$ (ne pa tudi $=, \subseteq, \subset, \supseteq, \supset$).

(a) $A = B$.

Pravilni odgovor je katerikoli od naslednjih:

- $\forall x \in U : ((x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A))$,
- $\forall x \in U : (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \forall x \in U : (x \in B \Rightarrow x \in A)$,
- $\forall x \in U : (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \forall y \in U : (y \in B \Rightarrow y \in A)$,
- $\forall x \in U : (x \in A \wedge x \in B \vee \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B))$.
- $\forall x \in U : (x \in A \wedge x \in B \vee x \notin A \wedge x \notin B)$.

(b) $A \cap B = \emptyset$.

Pravilni odgovor je katerikoli od naslednjih:

- $\forall x \in U : (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B))$,
- $\forall x \in U : (x \notin A \vee x \notin B)$,
- $\forall x \in U : ((x \in A \Rightarrow \neg(x \in B)) \wedge (x \in B \Rightarrow \neg(x \in A)))$,
- $\forall x \in U : (x \in A \wedge \neg(x \in B) \vee \neg(x \in A) \wedge x \in B \vee \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B))$.

(c) Če sta množici A in B disjunktni, potem B in C nista disjunktni.

Pravilni odgovor je

$$\forall x \in U : (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)) \Rightarrow \exists x \in U : (x \in B \wedge x \in C).$$

- Točki (1a) in (1b) sta vredni po 8 točk, točka (1c) pa 9 točk.
- Če pri delu (1a) odgovorite z $\forall x \in U : (x \in A \wedge x \in B)$, dobite 5 točk.
- Pri delu (1b) dobite 4 točke, če odgovorite z enim od:
  - $\forall x \in U : (x \in A \Rightarrow \neg(x \in B))$,
  - $\forall x \in U : (x \in A \wedge \neg(x \in B) \vee \neg(x \in A) \wedge x \in B)$.

  Če odgovorite z $\forall x \in U : (x \in A \wedge \neg(x \in B))$, dobite 3 točke.
- Če v delu (1c) odgovorite z $(A \cap B = \emptyset) \Rightarrow \neg(B \cap C = \emptyset)$, dobite 3 točke. Če za $A \cap B = \emptyset$ in $B \cap C = \emptyset$ vstavite formulo, ki ste jo izpeljali v (1b) (četudi napačno), pri čemer morata biti B in C vstavljena na ustrezna mesta namesto A in B, dobite 6 točk.

2. **[25 točk]** Naj bo $f : \mathbb{N} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ **surjektivna** preslikava, $A, B \subseteq \mathbb{N}$ množici in $g : A \to B$ taka preslikava, da je kompozitum $g \circ f : \mathbb{N} \to B$ dobro definirana preslikava. Odgovorite na naslednja vprašanja.

(a) Napišite primer preslikave f z zgornjimi lastnostmi.

Pravilni odgovori so npr.:

- $f(x) = \begin{cases} x, & \text{za } 1 \leq x \leq 5, \\ 1, & \text{sicer.} \end{cases}$
- Katerokoli premešanje števil 1 do 5, vsa ostala števila pa preslikana kamorkoli v množico $\{1,2,3,4,5\}$.
- $f(x) = (x \mod 5) + 1$.

(b) Kaj lahko iz dobre definiranosti $g \circ f$ sklepamo o množici A?

Ker je f surjektivna, je $\mathcal{Z}_f = \{1,2,3,4,5\}$. Torej moramo poznati $g(i)$ za vsak $i = 1,2,3,4,5$. Zato je $\{1,2,3,4,5\} \subseteq A$.

(c) Ali obstaja taka množica A in preslikava $g : A \to \mathbb{N}$, da je $g \circ f$ surjektiven? Odgovor utemelji.

Ne obstaja. Ker je zaloga vrednosti $\mathcal{Z}_f$ moči 5, je tudi zaloga vrednosti kompozituma $g \circ f$ največ moči 5. Ker je $g \circ f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, bi morala biti tudi slika kompozituma enaka $\mathbb{N}$. To pa ne gre.

(d) Izberite taki množici A, B in preslikavo $g : A \to B$, da bo $g \circ f$ surjektiven.

Npr. $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1\}$ in $g(i) = 1$ za vsak $i \in A$.

- Najbolje rešene tri od štirih točk so vredne po 7 točk, preostala pa 4 točke.
- V (2a) dobite 4 točke od 7, če ne napišete predpisa za točke različne od 1,2,3,4,5.
- V (2b) dobite 4 točke od 7, če napišete, da je $A = \{1,2,3,4,5\}$.
- V primeru napačne utemeljitve za pravilen odgovor pri (2c) dobite 2 točki od 7.
- Če v (2d) ne napišete eksplicitno A in B, pač pa le pravilen g, dobite 4 točke od 7.

3. [**25 točk**] Na množici $\mathbb{N}$ definiramo relacijo R z opisom

$$a \, R \, b \quad \text{natanko tedaj, ko je} \quad a + b \quad \text{sodo število.}$$

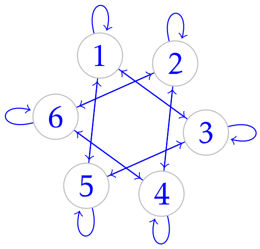
(a) Utemelji, da je relacija R refleksivna, simetrična in tranzitivna. Opiši njene ekvivalenčne razrede!

- Refleksivnost: Pokazati moramo: $\forall x \in \mathbb{N} : xRx$.
  Naj bo $x \in \mathbb{N}$.
  Dokazujemo: $xRx \iff x + x = 2k, \; k \in \mathbb{Z}$.
  Računamo: $x + x = 2k \Rightarrow 2x = 2k \Rightarrow k = x$.
- Simetričnost: Pokazati moramo: $\forall x, y \in \mathbb{N} : xRy \Rightarrow yRx$.
  Naj bosta $x, y \in \mathbb{N}$.
  Predpostavimo: $xRy \iff x + y = 2k, \; k \in \mathbb{Z}$.
  Dokazujemo: $yRx \iff y + x = 2l, \; l \in \mathbb{Z}$.
  Računamo: $y + x = x + y = 2k \Rightarrow l = k$.
- Tranzitivnost: Pokazati moramo: $\forall x, y, z \in \mathbb{N} : xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.
  Naj bodo $x, y, z \in \mathbb{N}$.
  Predpostavimo: $xRy \wedge yRz$.
  $xRy \iff x + y = 2k, k \in \mathbb{Z} \longrightarrow x = 2k - y$
  $yRz \iff y + z = 2l, k \in \mathbb{Z} \longrightarrow z = 2l - y$
  Dokazujemo: $xRz \iff x + z = 2m, \; m \in \mathbb{Z}$.
  Računamo: $x + z = (2k - y) + (2l - y)$=2k+2l-2y=2(k+l-y)$\Rightarrow m = k + l - y$.

- Ekvivalenčna razreda: $R[1] = \{2k+1,\ k \in \mathbb{N}\}$, $R[2] = \{2k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

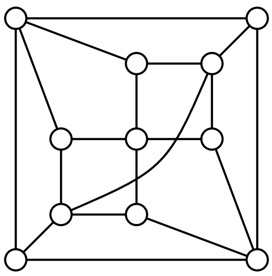
(b) Zapiši opis relacije R^{C}.
$xR^{\mathsf{C}}y \iff a+b$ liho število

(c) Denimo, da relacijo R definiramo na množici $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ (z istim opisom). Pregledno nariši njen graf.



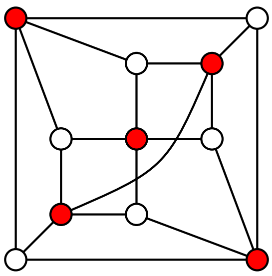
- Za dokaz refleksivnosti dobite 3 točke.
- Za dokaza simetričnosti in tranzitivnosti dobite po 4 točke.
- Če pravilno določite ekvivalenčna razreda, dobite 4 točke.
- Pravilen opis relacije R^{C} je ovrednoten s 5 točkami.
- Pravilno narisan graf relacije je ovrednosten s 5 točkami.

4. [**25 točk**] Na sliki je prikazan graf G.



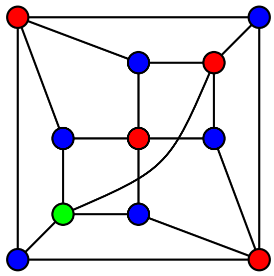
(a) Ali je graf G Eulerjev? Če je, označi Eulerjev obhod, sicer pa dobro utemelji, zakaj ni.
Graf ni Eulerjev, saj vsebuje vozlišča lihih stopenj (denimo stopnje 3).

(b) Ali je graf G Hamiltonov? Če je, nariši Hamiltonov cikel, sicer pa z izrekom o razpadu grafa pokaži, da ni.
Graf ni Hamiltonov, kar dokažemo z izrekom o razpadu grafa.
Naj bo S množica rdečih vozlišč na sliki. Velja $|S| = 5$, graf $G - S$ pa ima 6 povezanih komponent. S pomočjo izreka o razpadu grafa zato sklepamo, da graf ni Hamiltonov.



(c) Določi kromatično število grafa G.

Ker je $\omega(G) = 2$ in $\Delta(G) = 4$, sklepamo $2 \leq \chi(G) \leq 4$ (Brooks).
Opazimo, da ni možno najti 2-barvanja grafa G, saj ta vsebuje 5-cikel (za barvanje lihega cikla potrebujemo 3 barve). Zato $\chi(G) \neq 2$. Najdemo pa 3-barvanje grafa G na sliki. Sledi $\chi(G) = 3$.



- Če pravilno sklenete in utemeljite, da graf ni Eulerjev, dobite 7 točk.
- Če dokažete, da graf ni Hamiltonov, pri čemer uporabite dokaz o razpadu grafa, dobite 8 točk.
- Za pravilno določena $\omega(G)$ in $\Delta(G)$ dobite 2 točki.
- Pravilna utemeljitev neobstoja 2-barvanja grafa G je ovrednotena s 3 točkami.
- Za 3-barvanje grafa G in sklep, da je $\chi(G) = 3$, prejmete 5 točk.