

Diskretne strukture: prvi izpit - računski del A

19. januar 2022

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani. Vse odgovore dobro utemelji!

1	
2	
3	
4	
Σ	

1. naloga (25 točk)Z uporabo matematične indukcije dokaži, da za vsako naravno število $n > 0$ velja

$$1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{n-1} = \frac{5^n - 1}{4}.$$

• *Baza indukcije:* $n=1$ $1 = \frac{5^1 - 1}{4}$ (5)
 $1 = 1$ velja

• *Indukcijski korak:* Naj bo $n \in \mathbb{N}$

• *Predpostavimo:* $1 + 5 + \dots + 5^{n-1} = \frac{5^n - 1}{4}$ (5)

• *Dokazujemo:* $1 + 5 + \dots + 5^{n-1} + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{4}$ (5)

• *Računamo:* $1 + 5 + \dots + 5^{n-1} + 5^n = \frac{5^n - 1}{4} + 5^n$
predpostavka \rightarrow

$$= \frac{5^n - 1 + 4 \cdot 5^n}{4}$$

$$= \frac{5 \cdot 5^n - 1}{4}$$
 (10)

$$= \frac{5^{n+1} - 1}{4}$$

2. naloga (25 točk)

a) (10 točk) Pokaži, da sta formuli enakovredni.

$$\exists x \exists y (P(x) \Rightarrow Q(y)) \quad \text{in} \quad \forall x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x).$$

b) (15 točk) Pokaži, da formuli nista enakovredni.

$$\neg \exists x (P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \quad \text{in} \quad \neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \neg \exists x Q(x).$$

3. naloga (25 točk)

Na množici $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je definirana relacija R s predpisom:

$$(a, b)R(c, d) \text{ natanko tedaj, ko je } a + b = c + d.$$

a) (9 točk) Dokaži, da je R ekvivalenčna relacija.

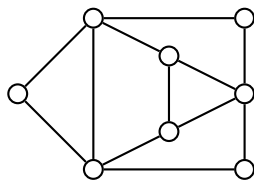
b) (5 točk) Opiši ekvivalenčni razred v katerem je element $(1, 3)$.

c) (5 točk) Zapiši opis relacije R^C .

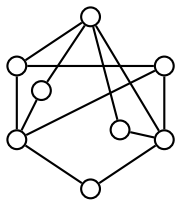
d) (6 točk) Denimo, da relacijo R definiramo na množici $A \times A = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$ z istim predpisom. Pregledno nariši njen graf.

4. naloga (25 točk)

a) (7 točk) Pokaži, da sta grafa G_1 in G_2 izomorfna, tako da najdeš izomorfizem med njima.

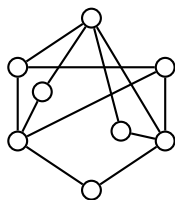


G_1



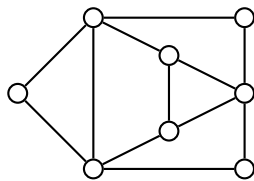
G_2

b) (6 točk) Ali je graf G_2 Eulerjev? Če je, nariši Eulerjev obhod. Če ni, to utemelji.



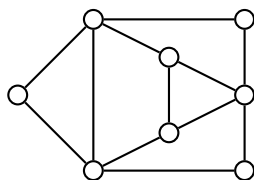
G_2

c) (6 točk) Ali je graf G_1 Hamiltonov? Če je, nariši kakšen Hamiltonov cikel. Če ni, to pokaži z izrekom o razpadu grafa.



G_1

d) (6 točk) Določi kromatično število grafa G_1 .



G_1