

**Diskretne strukture: prvi izpit - računski del B**

19. januar 2022

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani. Vse odgovore dobro utemelji!

**1. naloga (25 točk)**

Z uporabo matematične indukcije dokaži, da za vsako naravno število  $n > 0$  velja

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

• Baza indukcije:  $n=1$   $1 = \frac{3^1 - 1}{2}$  (5)  
 $1 = 1$  velja

• Indukcijski korak: naj bo  $n \in \mathbb{N}$

• Predpostavimo:  $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$  (5)

• Dokazujemo:  $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$  (5)

• Računamo:  $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} + 3^n = \frac{3^n - 1}{2} + 3^n$   
└──────────┘  
predpostavka

$$= \frac{3^n - 1 + 2 \cdot 3^n}{2}$$

$$= \frac{3 \cdot 3^n - 1}{2}$$

$$= \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

(10)

**2. naloga (25 točk)**

**a) (10 točk)** Pokaži, da sta formuli enakovredni.

$$\exists x \exists y (P(x) \Rightarrow Q(y)) \quad \text{in} \quad \forall x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x).$$

**b) (15 točk)** Pokaži, da formuli nista enakovredni.

$$\exists x (P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \quad \text{in} \quad \exists x P(x) \Leftrightarrow \exists x Q(x).$$

### 3. naloga (25 točk)

Na množici  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  je definirana relacija  $R$  s predpisom:

$$(a, b)R(c, d) \text{ natanko tedaj, ko je } |a - b| = |c - d|$$

a) (9 točk) Dokaži, da je  $R$  ekvivalenčna relacija.

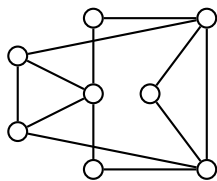
b) (5 točk) Opiši ekvivalenčni razred v katerem je element  $(1, 3)$ .

c) (5 točk) Zapiši opis relacije  $R^C$ .

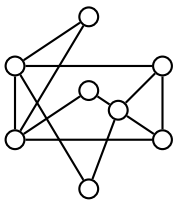
d) (6 točk) Denimo, da relacijo  $R$  definiramo na množici  $A \times A = \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}$  z istim predpisom. Pregledno nariši njen graf.

4. naloga (25 točk)

a) (7 točk) Pokaži, da sta grafa  $G_1$  in  $G_2$  izomorfna, tako da najdeš izomorfizem med njima.

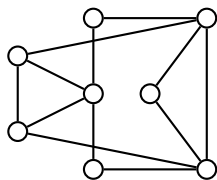


$G_1$



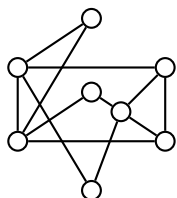
$G_2$

b) (6 točk) Ali je graf  $G_1$  Eulerjev? Če je, nariši Eulerjev obhod. Če ni, to utemelji.



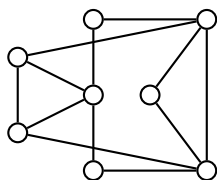
$G_1$

c) (6 točk) Ali je graf  $G_2$  Hamiltonov? Če je, nariši kakšen Hamiltonov cikel. Če ni, to pokaži z izrekom o razpadu grafa.



$G_2$

d) (6 točk) Določi kromatično število grafa  $G_1$ .



$G_1$