

**Diskretne strukture: tretji izpit - računski del**

24. marec 2022

Čas pisanja je **90 minut**.

Dovoljena je uporaba **1 lista A4 formata** s formulami.

Za pozitivno oceno je potrebno zbrati **vsaj 50 točk**.

Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo prepovedani**.

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

**Vse odgovore dobro utemelji!**

**1. naloga (25 točk)**

Dokaži, da je naslednji sklep **pravilen**, tako da zapišeš formalen dokaz tega sklepa.

$$(\neg p \vee q) \Rightarrow r, \quad r \Rightarrow (s \vee t), \quad \neg s \wedge \neg u, \quad \neg u \Rightarrow \neg t \quad \models \quad p$$

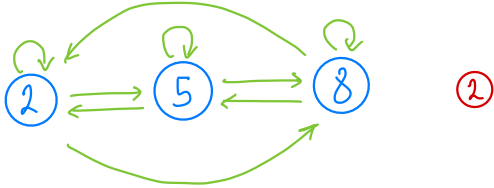
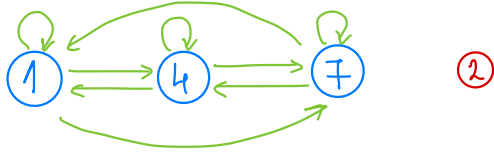
- |                                    |              |   |     |
|------------------------------------|--------------|---|-----|
| 1. $(\neg p \vee q) \Rightarrow r$ | Predpostavka | 1 | (2) |
| 2. $r \Rightarrow (s \vee t)$      | Predpostavka | 2 | (2) |
| 3. $\neg s \wedge \neg u$          | Predpostavka | 3 | (2) |
| 4. $\neg u \Rightarrow \neg t$     | Predpostavka | 4 | (2) |
| 5. $\neg s$                        | $P_0(3)$     |   | (2) |
| 6. $\neg u$                        | $P_0(3)$     |   | (2) |
| 7. $\neg t$                        | $MP(4,6)$    |   | (2) |
| 8. $\neg s \wedge \neg t$          | $Zd(5,7)$    |   | (2) |
| 9. $\neg(s \vee t)$                | $\sim(8)$    |   | (2) |
| 10. $\neg r$                       | $MT(2,9)$    |   | (2) |
| 11. $\neg(\neg p \vee q)$          | $MT(1,10)$   |   | (2) |
| 12. $p \wedge \neg q$              | $\sim(11)$   |   | (2) |
| 13. $p$                            | $P_0(12)$    |   | (1) |

## 2. naloga (25 točk)

Na množici  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  definiramo relacijo  $R$ :

$$xRy \Leftrightarrow x - y = 3k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

a) (6 točk) Nariši graf relacije  $R$ .



b) (4 točk) Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti relacije  $R$ .

$$\mathbb{D}_R = A \quad \text{②}$$

$$\mathbb{Z}_R = A \quad \text{②}$$

c) (15 točk) Dokaži, da je  $R$  ekvivalenčna relacija.

Refleksivna:  $\forall x \in A: xRx$

$$\text{Velja, ker: } x - x = 0 = 3 \cdot 0 \quad \text{⑤}$$

Simetrična:  $\forall x, y \in A: xRy \Rightarrow yRx$

$$\text{Velja, ker: } x - y = 3k \Rightarrow y - x = -3k = 3 \cdot (-k) \quad \text{⑤}$$

Transitivna:  $\forall x, y, z \in A: xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

$$\text{Velja, ker: } \begin{array}{l} x - y = 3 \cdot k_1 \\ \text{in } y - z = 3 \cdot k_2 \end{array} \Rightarrow x - \cancel{y} + \cancel{y} - z = x - z = 3k_1 + 3k_2 = 3(k_1 + k_2) \quad \text{⑤}$$

$\Rightarrow R$  je ekvivalenčna relacija.

### 3. naloga (25 točk)

Preslikavi  $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  in  $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  sta definirani s predpisoma

$$f(x, y) = x - y \quad \text{in} \quad g(x) = (x + 1, x - 3).$$

a) (5 točk) Poišči vsaj dve točki  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , za katere je  $f(x, y) = -2$ , in vse  $x \in \mathbb{Z}$ , za katere je  $g(x) = (-2, -6)$ .

$$\bullet (0, 2) \Rightarrow f(0, 2) = 0 - 2 = -2$$

$$\bullet (-2, 0) \Rightarrow f(-2, 0) = -2 - 0 = -2$$

⑤

$$\bullet g(x) = (x+1, x-3) = (-2, -6)$$

$$\left. \begin{array}{l} x+1 = -2 \\ x-3 = -6 \end{array} \right\} \Rightarrow x = -3$$

↑  
Edina takšna točka.

b) (10 točk) Ali je  $f$  surjektivna? Ali je  $g$  injektivna? Odgovore utemelji.

•  $f$  je surjektivna, ker velja:  $\mathbb{Z}_f = \mathbb{Z}$   
npr.  $f(k, 0) = k - 0 = k, \forall k \in \mathbb{Z}$

⑤

•  $g$  je injektivna, ker različne originale preslika v različne slike;

⑤

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z}: \left. \begin{array}{l} x_1 \neq x_2 \Rightarrow \\ x_1 + 1 \neq x_2 + 1 \\ x_1 - 3 \neq x_2 - 3 \end{array} \right\} \Rightarrow (x_1 + 1, x_1 - 3) \neq (x_2 + 1, x_2 - 3)$$

$g(x_1) \neq g(x_2)$

c) (10 točk) Zapiši predpisa za  $f \circ g$  in  $g \circ f$ .

$$\bullet (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1, x-3) = x+1 - (x-3) = \cancel{x}+1 - \cancel{x}+3 = 4$$

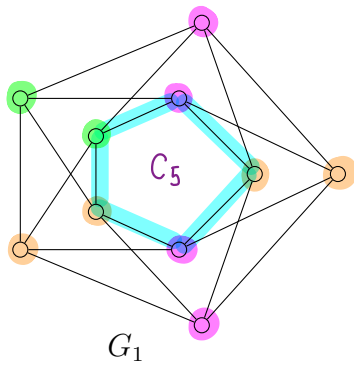
⑤

$$\bullet (g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(x-y) = (x-y+1, x-y-3)$$

⑤

4. naloga (25 točk)

a) (10 točk) Določi kromatično število grafa  $G_1$ . Ali je  $G_1$  dvodelen? Zakaj (ne)?

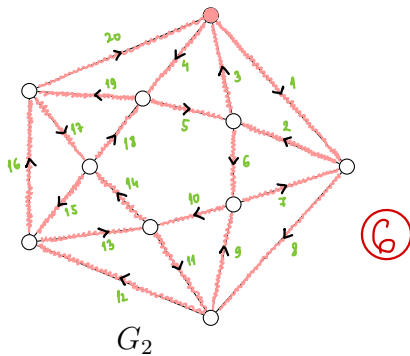


$$\omega(G_1) \leq \chi(G_1) \leq \Delta(G_1) \quad (\text{ni poln graf, ni lihi cikel})$$

$$2 \leq \chi(G_1) \leq 4 \quad (1)$$

- Ali je  $\chi(G_1)=2$ ? Ne, ker  $G_1$  vsebuje lihi cikel  $C_5$ . Za lihe cikle potrebujemo 3 barve. (3)
- Ali je  $\chi(G_1)=3$ ? Ja, ker obstaja 3-barvanje grafa  $G_1$ . (prikazano na grafu). (3)
- Graf  $G_1$  ni dvodelen, ker vsebuje lihi cikel  $C_5$ . (ni 2-obarvljiv.) (3)

b) (8 točk) Ali je graf  $G_2$  Eulerjev? Zakaj (ne)?



Graf  $G_2$  je Eulerjev, ker vsebuje Eulerjev obhod (prikazan na grafu). (2)

c) (7 točk) Ali sta grafa  $G_1$  in  $G_2$  izomorfna? Če sta, opiši izomorfizem med grafoma.

Grafa  $G_1$  in  $G_2$  nista izomorfna, (2)

ker:  $G_2$  vsebuje  $C_3$ ,  $G_1$  ne vsebuje  $C_3$ . (5)