

Prvi izpit iz Numeričnih metod

24. januar 2024

1. **naloga** Naj bo $a > 0$.

(a) Preverite, da imajo funkcije

$$f_1(x) = x^2 - a, \quad f_2(x) = x - \frac{a}{x}, \quad f_3(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$$

ničli $x_{1,2} = \pm \sqrt{a}$.

(b) Določite iteracijske funkcije tangentne metode, ki jo priredite funkcijam f_1, f_2, f_3 .

(c) Kaj lahko poveste o konvergenci posamezne metode?

2. **naloga** Dane so točke $(-1, -2), (1, 2), (2, 1), (3, -3)$. Poiščite funkcijo oblike

$$f(x) = a_1x + a_2x^2,$$

ki se po metodi najmanjših kvadratov najbolje prilega danim točkam.

3. **naloga**

(a) S pomočjo sestavljenega Simpsonovega pravila iz 3 osnovnih pravil izračunajte približek za vrednost integrala

$$\int_0^2 \frac{1}{3 + \frac{x^2}{2}} dx.$$

(b) Ocenite napako približka iz (a).

4. **naloga** Naj bo začetni problem $y' = f(x, y)$ podan s funkcijo $f(x, y) = x + y - 1$ in začetnim pogojem $y_0 = 1$ v točki $x_0 = 0$.

(a) Preverite, da je $y(x) = Ce^x - x$ rešitev začetnega problema in konstanto C določite.

(b) Poiščite numerično rešitev začetnega problema na intervalu $[0, 1]$ s pomočjo Runge–Kutta metode s korakom $h = 1$ z Butcherjevo tabelo

0				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$			
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1		
1	1	-1	1	
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

(c) Rezultate primerjajte s točno rešitvijo.