IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD (VSŠ)
6. junij 2001

1. naloga: Rešujete nelinearno enačbo

$$e^x - x - 2 = 0.$$

a) Koliko rešitev ima ta enačba? Približno jih določite.

b) Največjo ničlo izračunajte z metodo regula falsi na tri decimalna mesta.

c) Najmanjšo ničlo pa z metodo fiksne točke na pet decimalnih mest natančno.

2. naloga: Integral funkcije na intervalu $[0, h]$ želimo izračunati po približni formuli

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx \alpha\, f(0) + \beta\, f(2h/3).$$

a) Določite α in β tako, da bo formula čim višjega reda.

b) Izračunajte integral

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$$

tako, da zgornjo formulo uporabite s korakom $\pi/8$.

c) Izračunajte še približek s trapeznim pravilom pri isti dolžini koraka in primerjajte oba približka s točno vrednostjo. Kolikšni sta absolutni napaki?

IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD (VSS)
7. februar 2001

1. naloga: Rešuješ sistem linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer za elemente matrike A dimenzije $n \times n$ velja $a_{ij} = 0$, za $j > n - i + 1$, ostali elementi so pa poljubni.

a) Zapiši primer ene take matrike za $n = 3$.

b) Napiši ekonomičen algoritem, ki reši omenjeni sistem.

c) Preštej število operacij (množenj in deljenj).

2. naloga: Rešuješ diferencialno enačbo $y'(x) = y(x)$, $y(0) = 2$.

a) Poišči numerično rešitev enačbe z Eulerjevo metodo na intervalu $[0, 1]$ s korakom $h = 0.25$.

b) Poišči numerično rešitev še z metodo Runge-Kutta četrtega reda z enakim korakom.

c) Izračunaj točno rešitev diferencialne enačbe.

Dodatek: Kolikšna je globalna napaka rešitve iz točke a) pri $x = 1$?

IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD (VSŠ)
6. junij 2001

1. naloga: Rešujete nelinearno enačbo

$$e^x - x - 2 = 0.$$

a) Koliko rešitev ima ta enačba? Približno jih določite.

b) Največjo ničlo izračunajte z metodo regula falsi na tri decimalna mesta.

c) Najmanjšo ničlo pa z metodo fiksne točke na pet decimalnih mest natančno.

2. naloga: Integral funkcije na intervalu $[0, h]$ želimo izračunati po približni formuli

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx \alpha\, f(0) + \beta\, f(2h/3).$$

a) Določite α in β tako, da bo formula čim višjega reda.

b) Izračunajte integral

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx$$

tako, da zgornjo formulo uporabite s korakom $\pi/8$.

c) Izračunajte še približek s trapeznim pravilom pri isti dolžini koraka in primerjajte oba približka s točno vrednostjo. Kolikšni sta absolutni napaki?

IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD–VSP
31.1.2003

1. Tabelo podatkov

x_i	0	$\pi/4$	$\pi/2$
y_i	1.1	1.5	0.9

aproksimirate s funkcijo $f(x) = A\sin x + B\cos x$. Po metodi najmanjših kvadratov določite parametra A in B tako, da bo vsota

$$\sum_{i=1}^{3}(f(x_i) - y_i)^2$$

minimalna.

   a) Iščemo torej minimum funkcije dveh spremenljivk. Kateri sta ti dve spremenljivki?

   b) Zapišite normalni sistem enačb.

   c) Rešite sistem iz točke b).

2. Rešujete diferencialno enačbo

$$y'(x) + 2\,x\,y(x) = 0, \quad y(0) = 1.$$

   a) Preverite, da je splošna rešitev zgornje enačbe

$$y(x) = \exp(-x^2 + C),$$

   kjer je C neka konstanta. Določite jo tako, da bo rešitev potekala skozi dano začetno točko.

   b) Z Eulerjevo metodo poiščite približek za vrednost $y(0.5)$, pri čemer za korak metode vzamete $h = 0.1$.

   c) Izračunajte globalno napako numerične rešitve v $x = 0.5$, če je korak tak kot v primeru b).

   d) Dodatek: Kolikšna je lokalna napaka metode v točki $x = 0.25$, če je korak $h = 0.25$?

IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD–VSP
14.2.2003

1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Vemo, da je tridiagonalna (neničelni elementi so lahko le na glavni in na obeh stranskih diagonalah) diagonalno dominantna. Dan je še vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

   a) Zapišite **učinkovit** algoritem za reševanje sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ z Jacobijevo metodo.

   b) Za matriko
   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$
   in vektor $\mathbf{b} = [4, -2, 6, 2]^T$ izračunajte približka $\mathbf{x}^{(1)}$ in $\mathbf{x}^{(2)}$ z algoritmom iz točke a. Začetni približek naj bo $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$.

   c) Izračunajte napako $\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}\|_\infty / \|\mathbf{x}\|_\infty$ iz točke b, če veste, da je točna rešitev $\mathbf{x} = [1, 1, 1, 1]^T$.

2. Integral funkcije f na intervalu $[x_0, x_0 + h]$ računate približno s formulo
   $$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx \approx \alpha\, f(c),$$
   kjer sta α in c neznana parametra.

   a) Določite α in c tako, da bo formula čim višjega reda.

   b) Izpeljite sestavljeno pravilo za računanje integrala $\int_a^b f(x)\, dx$ tako, da interval $[a, b]$ razdelite na n delov in na vsakem uporabite formulo iz točke a.

   c) S pravilom iz točke b izračunajte
   $$\int_0^1 \sin x\, dx,$$
   pri čemer $[0, 1]$ razdelite na 4 dele.

IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD (VSŠ)
10. junij 2003

1. naloga: Rešujete enačbo

$$x \ln x^3 - 3 = 0.$$

a) Prepričajte se, da ima enačba na intervalu $[1, 2]$ vsaj eno rešitev.

b) Zapišite prve tri približke za rešitev enačbe po metodi regula falsi, če za začetni interval vzamete $[1, 2]$.

c) Kolikšni sta relativna in absolutna napaka zadnjega približka iz točke b, če veste, da je točna rešitev enačbe 1.76322?

2. naloga: Za neznano funkcijo f ste dobili naslednjo tabelo podatkov:

x	0	0.5	1
$f(x)$	1	1.6487	2.7183

a) Zapišite tabelo deljenih diferenc.

b) Poiščite interpolacijski polinom p_2 druge stopnje, ki interpolira podatke iz tabele.

c) Integral

$$\int_0^1 f(x)\, dx$$

izračunajte s trapezno formulo pri koraku $h = 0.5$.

Dodatek: Analitično izračunajte integral

$$\int_0^1 p_2(x)\, dx$$

in primerjajte rezultat s tistim iz točke c.

IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD (VSŠ)
16. september 2003

1. naloga: Naj bo A taka realna matrika reda $n \times n$, da se naslednji algoritem izteče:

for $j = n : -1 : 2$
  for $i = j-1 : -1 : 1$
  $p = A(i,j)/A(j,j);$
    $A(i, 1 : j-1) = A(i, 1 : j-1) - p * A(j, 1 : j-1);$
    $A(i,j) = 0;$
  end
end

(a) Kako se spremeni matrika

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

ko izvedete zgornji algoritem?

(b) Preštejte število deljenj in množenj v zgornjem algoritmu (pri dimenziji matrike $n \times n$).

(c) Kako bi z zgornjim algoritmom izračunali determinanto matrike?

(d) Kaj pravzaprav naredi ta algoritem na matriki A?

2. naloga: Naj bo

$$p(x) = (x+2)(x-7) = x^2 - 5x - 14 \tag{1}$$

in $f(x) = p(x) - 0.02x^2$.

(a) Z Newtonovo metodo izračunajte največjo ničlo polinoma f na tri decimalna mesta natančno.

(b) Z metodo regula falsi izračunajte najmanjšo ničlo polinoma f na tri decimalna mesta natančno.

(c) Katera od ničel se je relativno bolj spremenila?

IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD–VSP
19.1.2004

1. Naslednja tabela prikazuje oceno števila rjavih medvedov v Sloveniji

Leto	1961	1972	2001
Število	150	288	350

   a) Določite premico, ki se najbolje prilega podatkom po metodi najmanjših kvadratov.

   b) S pomočjo dobljene premice ocenite število rjavih medvedov leta 2004.

   c) Ponovno uporabite premico, da ugotovite, kdaj je bilo v Sloveniji približno 200 rjavih medvedov.

   Namig: Zaradi lažjega računanja letom odštejte 1980.

2. Rešujete začetni problem

$$y'(x) = e^{-x} - y(x), \quad y(0) = 0.$$

   a) Preverite, da je splošna rešitev diferencialne enačbe

$$y(x) = e^{-x}(x + C).$$

   b) Določite konstanto C tako, da bo rešitev ustrezala začetnemu pogoju $y(0) = 0$.

   c) Poiščite numerični približek za rešitev začetnega problema v točki $x = 1$ z metodo Runge-Kutta četrtega reda s korakom $h = 0.5$.

   d) Kolikšna je napaka numerične rešitve iz točke c)?

IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD–VSP, 4.2.2004

1. Naj bo $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tridiagonalna matrika. Sistem linearnih enačb $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ rešujete iterativno z Gauss-Seidelovo metodo.

   a) Napišite **učinkovit** algoritem za računanje novega približka po tej metodi (ne izvajajte nepotrebnih množenj z 0).

   b) Preštejte število množenj in deljenj v algoritmu iz točke a).

   c) Naj bo
   $$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$
   $\mathbf{b} = [7, -2, 18, 25]^T$, $\mathbf{x}^{(0)} = [0.9, 1.9, 3.1, 4.2]^T$. Izračunajte približek $\mathbf{x}^{(1)}$ z Gauss-Seidelovo metodo.

2. Prečni presek predora opisuje naslednja tabela (glejte sliko, enote so v metrih)

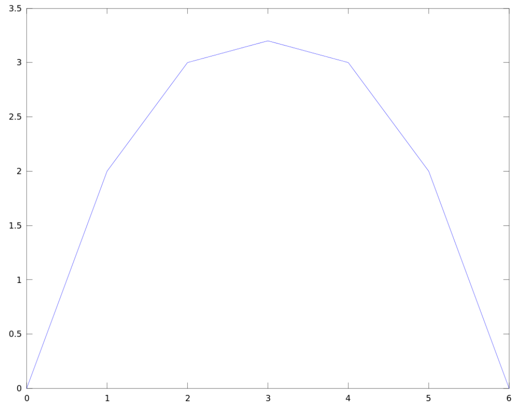
x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	2	3	3.2	3	2	0

   a) Izračunajte presek predora s sestavljenim Simpsonovim pravilom.

   b) Presek izračunajte še s sestavljenim trapeznim pravilom.

   c) Za koliko se razlikujeta volumna izkopa 50 metrov dolgega predora, če upoštevate rezultata iz točk a) in b).

Dodatek: Ali lahko rezultata iz a) in b) dobite z manj računanja?



IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD–VSP
2.6.2004

1. Naj bo $f(x) = \cos x - x$.

   a) Preverite, da ima f ničlo na intervalu $[0, 1]$.

   b) Ničlo na intervalu $[0, 1]$ določite na tri decimalna mesta z Newtonovo metodo. Primerni začetni približek določite sami.

   c) Ali Newtonova metoda konvergira, če za začetni približek izberemo $x_0 = \pi/2$?

2. Funkcijo $f(x) = \cos x$ interpolirate s parabolo v točkah $x_0 = -0.5$, $x_1 = 0$ in $x_2 = 0.5$.

   a) Izračunajte $f[-0.5, 0, 0.5]$.

   b) Določite koeficiente interpolacijske parabole.

   c) Izračunajte absolutno napako pri taki interpolaciji v točki $x = 0.25$.

IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD–VSP
10.9.2004

1. Za elemente realne matrike A dimenzije $n \times n$ velja: $a_{ij} = 0$ za $j < i-1$.

   a) Zapišite en primer take matrike za $n = 4$.

   b) Napišite **učinkovit** algoritem za reševanje sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je $\mathbf{b}$ znani vektor desnih strani.

   c) Kako se algoritem iz točke b) spremeni, če za elemente matrike A velja: $a_{ij} = 0$ za $j < i$?

2. Integral funkcije f na $[a, a+h]$ računamo s približno formulo

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx \approx \alpha f(a) + \beta f(a+h).$$

   a) Določite koeficienta α in β tako, da bo formula natančna za polinome čim višje stopnje.

   b) Z izpeljano formulo iz točke a) izračunajte približno vrednost integrala

$$\int_0^{0.2} \sin x\,dx.$$

   c) Kolikšna je relativna napaka rezultata iz točke b)?

IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD–VSP
17.1.2005

1. Debelina letalskega krila je dana z enačbo

$$d(x) = 2.969\sqrt{x} - 1.260x - 3.516x^2 + 2.843x^3 - 1.015x^4,$$

kjer je $x \in [0,1]$.

a) Zapišite enačbo, ki določa pri katerem x je krilo najdebelejše.
b) Enačbo iz točke a) rešite z bisekcijo na eno decimalno mesto.
c) Z Newtonovo metodo popravite rezultat iz točke b) tako, da bo točen na tri decimalna mesta.

2. Rešujete začetni problem

$$y'(x) = -2y(x) + e^{-x}, \quad y(0) = 1.$$

a) Določite numerični približek za $y(0.3)$ z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.1$.
b) Izračunajte točno rešitev zgornje enačbe, če veste, da je splošna rešitev oblike $y(x) = A\,e^{-2x} + e^{-x}$.
c) Izračunajte napako numeričnega približka iz točke a).

Dodatek: Izračunajte numerični približek za $y(0.3)$ z metodo Runge-Kutta 4. reda s korakom $h = 0.3$ Kolikšna je napaka v tem primeru?

IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD–VSP
2.2.2005

1. Lovci sem in tja opravijo štetje rjavih medvedov v Sloveniji. Štetje izvedejo tako, da v isti noči opazujejo prisotnost medveda z večine najbolj pomembnih opazovalnic po Sloveniji. Ker tako štetje ni zanesljivo, saj se vsi medvedi tisto noč ne prikažejo na plano, pa tudi lovcem ne gre popolnoma zaupati, lahko oceno števila medvedov naredimo tako, da na podlagi več zaporednih preštevanj (recimo v roku nekaj tednov, ko ni novih mladičev). To naredimo z metodo najmanjših kvadratov tako, da poiščemo konstanto N, za katero je vsota

$$\sum_{i=1}^{k}(N_i - N)^2$$

minimalna (pri tem je N_i rezultat i-tega štetja medvedov, k pa število preštevanj).

   a) Zapišite enačbo za konstanto N.
   b) Izračunajte N.
   c) Izračunajte N v primeru, ko so bila štetja naslednja: $N_1 = 337$, $N_2 = 356$, $N_3 = 352$ in $N_4 = 349$.

2. V naslednji tabeli so podatki hitrosti avtomobila (v[km/h]) v prvih dveh sekundah vožnje

v	40	46	51	55	59
t	0	0.5	1	1.5	2

   a) S trapeznim pravilom izračunajte razdaljo, ki jo je prevozil avtomobil v tem času.
   b) Isto izračunajte še s Simpsonovim pravilom.
   c) Kolikšen je pospešek ob času $t = 0.5$ in v času $t = 1.5$ (uporabite sredinsko formulo za izračun odvoda)?

Dodatek: Kolikšna je prevožena pot, če v tabeli upoštevate samo hitrosti pri 0, 1 in 2 sekundah?

IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD–VSP
1.6.2005

1. Za matriko $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ poznamo njen LU razcep, torej $A = L\,U$.

   a) Zapišite **učinovit** algoritem za reševanje sistema $A^T\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$, kjer je $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ znani vektor desnih strani sistema.

   b) Kolikšna je časovna zahtevnost algoritma iz točke a)?

   c) Izračunajte $\mathbf{x}$, če je

$$A = L\,U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   in $\mathbf{b} = [6, 7, 25]^T$.

   Namig: $(L\,U)^T = U^T\,L^T$.

2. *Gauss–Čebiševa* kavadraturna formula se glasi

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, f\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right).$$

   a) Z metodo nedoločenih koeficientov določite konstanti α_1 in α_2 za $n = 2$.

   b) S pomočjo dobljene formule za $n = 2$ izračunajte numerični približek za integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

   Namig: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$ *in* $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ *liha funkcija.*

NUMERIČNE METODE (VSŠ)
4. izpit, 9.9.2005

1. Želite poiskati presečišče grafov funkcij $f_1(x) = 2\,x - 6$ in $f_2(x) = \sin x$, torej numerično reševati enačbo $f_1(x) - f_2(x) = 0$.
   (a) Zapišite formulo za izračun novega približka za rešitve zgornje enačbe po Newtonovi metodi.
   (b) Z metodo iz točke a) poiščite rešitev na tri decimalna mesta natančno. Ustrezni začetni približek izberite sami.
   (c) V kateri točki se torej sekata funkciji f_1 in f_2?

2. Naslednja tabela prikazuje temperaturo ozračja (v stopinjah Celzija) ob posameznih urah dopoldneva

ura	8	9	10	11
temp.	11	13	17	23

   (a) Zapišite Newtonov interpolacijski polinom, ki interpolira tabelo.
   (b) S polinomom iz točke a) ocenite temperaturo ob 9^{45}.
   (c) Kakšni bi morali biti temperaturi ob 10. in 11. uri, da bi podatke iz tabele lahko interpolirali s premico?

IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD–VSP
20.1.2006

1. Naslednja tabela prikazuje število redno vpisanih študentov v prvi letnik računalništva, smer VSŠ

leto	1999	2000	2001	2002
vpisanih	231	236	254	242

   a) Z metodo najmanjših kvadratov izračunajte konstantni polinom, ki najbolje aproksimira tabelo. Kaj pomeni ta vrednost?

   b) Izračunajte še linearni polinom, ki po metodi najmanjših kvadratov aproksimira isto tabelo.

   c) S polinomom iz točke b) ocenite število vpisanih v prvi letnik leta 2004.

   Namig: Računajte leta relativno glede na začetek novega tisočletja.

2. Rešujete začetni problem

$$y'(x) = -2y(x) + e^{-x}, \quad y(0) = 1.$$

   a) Določite numerični približek za $y(0.4)$ z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.2$.

   b) Izračunajte točno rešitev zgornje enačbe, če veste, da je splošna rešitev oblike $y(x) = e^{-x}\,(A\,e^{-x} + 1)$.

   c) Izračunajte napako numeričnega približka iz točke a).

Dodatek: Izračunajte numerični približek za $y(0.4)$ z metodo Runge-Kutta 4. reda s korakom $h = 0.4$ Kolikšna je napaka v tem primeru?

IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD–VSP
6. 6. 2006

1. Rešuješ enačbo
$$e^{-x} = \sin(x)$$
   (a) Nariši grafa obeh strani enačbe in določi približno lokacijo rešitev enačbe.
   (b) Z Newtonovo metodo poišči prvo (najmanjšo pozitivno) ničlo na 5 decimalnih mest natančno.
   (c) Z navadno iteracijo izračunaj drugo ničlo na 3 mesta natančno. Enačbo zapiši v obliki
$$x = \pi - \arcsin(e^{-x}).$$

2. Za neznano funkcijo $f(x)$ imamo naslednjo tabelo vrednosti

x	-0.5	0.5	1.5
f(x)	1	0.8	-1

   (a) Zapiši tabelo deljenih diferenci.
   (b) Izračunaj polinom $p_2(x)$ druge stopnje, ki interpolira podatke iz tabele.
   (c) Poišči približka za ničlo in lokalni maksimum funkcije $f(x)$. Pomagaj si s polinomom $p_2(x)$.

IZPIT IZ NUMERIČNIH METOD (VSP)

22. januar 2007

1. Rešujete enačbo

$$x \ln x^3 - 3 = 0.$$

   a) Prepričajte se, da ima enačba na intervalu $[1, 2]$ vsaj eno rešitev.

   b) Zapišite prve tri približke za rešitev enačbe po metodi regula falsi, če za začetni interval vzamete $[1, 2]$.

   c) Kolikšni sta relativna in absolutna napaka zadnjega približka iz točke b, če veste, da je točna rešitev enačbe 1.76322?

2. Za neznano funkcijo f dobimo naslednjo tabelo podatkov:

x	0	0.5	1
$f(x)$	1	1.6487	2.7183

   a) Zapišite tabelo deljenih diferenc.

   b) Poiščite interpolacijski polinom p_2 druge stopnje, ki interpolira podatke iz tabele.

   c) Integral

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

   izračunajte s Simpsonovo formulo pri koraku $h = 0.5$.

Dodatek: Analitično izračunajte integral

$$\int_0^1 p_2(x)\,dx$$

in primerjajte rezultat s tistim iz točke c.