Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

30. oktober 2024

Operacije z množicami

relacija pripadnosti . . . $x \in A$
x pripada A.
podajanje množic

- z naštevanjem elementov $A = \{0, 1, 2\}$
- z neko izjavno formulo $A = \{x \,;\, \varphi(x)\}$
  Velja: $x \in A \Leftrightarrow \varphi(x)$

Enakost in vsebovanost

Množici A in B sta *enaki*,

$$A = B \iff \forall x\,(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Množica A je *podmnožica* množice B,

$$A \subseteq B \iff \forall x\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$$

relacija *vsebovanosti (inkluzije)*.

Množica A je *prava podmnožica* množice B,

$$A \subset B \iff A \subseteq B \;\wedge\; A \neq B$$

relacija *stroge vsebovanosti (stroge inkluzije)*.

Operacije z množicami

- *unija* $\quad A \cup B = \{x\,;\, x \in A \vee x \in B\}$
- *presek* $\quad A \cap B = \{x\,;\, x \in A \wedge x \in B\}$
- *razlika* $\quad A \setminus B = \{x\,;\, x \in A \wedge x \notin B\}$
- *simetrična razlika* $\quad A + B = \{x\,;\, x \in A \veebar x \in B\}$

Lastnosti operacij

- $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
- $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

Pravimo, da sta množici A in B *disjunktni*, če je $A \cap B = \emptyset$.

Univerzalna množica in komplement

Univerzalna množica, označimo jo z S, ustreza področju pogovora v predikatnem računu. Z univerzalno množico se izognemo Russellovemu paradoksu.

Vse obravnavane množice so vsebovane v univerzalni množici S.

Komplement množice A, označimo ga z A^c, definiramo kot

$$A^c = S \setminus A$$

Lastnosti komplementa

- $(A^c)^c = A$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $A \setminus B = A \cap B^c$
- $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$
- $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq B^c \iff B \subseteq A^c$

Enakosti z množicami

Pokažimo, da velja

$$A \cup (A \cap B) = A$$

Sistem enačb

Reši sistem enačb z množicami.

$$
\begin{aligned}
X \cup A &= A \setminus X \\
X \cup A &= X
\end{aligned}
$$

Sistem enačb, še en zgled

Reši sistem enačb z množicami.

$$
\begin{aligned}
A \cup X &= B \\
A \cap X &= C
\end{aligned}
$$

Reševanje sistemov enačb z eno neznano množico

Trditev

$A \cup B = \emptyset \iff A = \emptyset \wedge B = \emptyset$

Trditev

$A + B = \emptyset \iff A = B$

Reševanje sistemov enačb z eno neznano množico

Reši sistem enačb z množicami.

$$A \cap X = B \setminus X$$
$$C \cup X = X \setminus A$$

Reševanje sistemov enačb z eno neznano množico

Postopek:

1. Vse člene prenesemo na levo stran enačb z uporabo enakosti $B + B = \emptyset$ — vsaki enačbi na obeh straneh "*prištejemo*" njeno desno stran.
2. Vse enačbe združimo v eno samo z uporabo ekvivalence

   $A = \emptyset \wedge B = \emptyset \iff A \cup B = \emptyset$
3. Vse operacije izrazimo z $\cup$, $\cap$ in ^{c}

   $A \setminus B = A \cap B^c \qquad A + B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$

   Z uporabo enakosti levo stran enačbe zapišemo kot unijo presekov danih množic, neznane množice ter njihovih komplementov. ("DNO")

Reševanje sistemov enačb z eno neznano množico

Postopek:

4. Vsak presek oblike $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$, ker so vse A_i znane množice ali njihovi komplementi nadomestimo z

   $(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap X) \cup (A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap X^c)$

   S tem dosežemo, da v vsakem preseku nastopa bodisi X bodisi X^c.
5. Izpostavimo X in X^c. Enačba dobi obliko

   $(P \cap X) \cup (Q \cap X^c) = \emptyset$
6. Velja

$$
\begin{aligned}
(P \cap X) \cup (Q \cap X^c) = \emptyset \quad &\iff \quad P \cap X = \emptyset \ \wedge \ Q \cap X^c = \emptyset \\
&\iff \quad Q \subseteq X \subseteq P^c
\end{aligned}
$$

Reševanje sistemov enačb z eno neznano množico

Odgovor:

Sistem je rešljiv natanko tedaj, ko je

$$A \cap (B \cup C) = \emptyset$$

ali enakovredno

$$B \cup C \subseteq A^c.$$

V tem primeru je rešitev vsaka množica X, za katero velja

$$B \cup C \subseteq X \subseteq A^c.$$

Parametrično:

$$X = (B \cup C) \cup (T \cap A^c),$$

kjer je T *poljubna* množica

Potenčna množica

Potenčna množica množice A, $\mathcal{P}A$, je množica vseh podmnožic množice A.

$$\mathcal{P}A = \{B \; ; \; B \subseteq A\}$$

Tako $\emptyset$ kot A pripadata potenčni množici $\mathcal{P}A$.

$$\mathcal{P}\{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{P}\emptyset = \{\emptyset\} \qquad \mathcal{P}\{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Izrek

Če ima množica A natanko n elementov, potem ima njena potečna množica $\mathcal{P}A$ natanko 2^n elementov.

Družine množic

Naj bo

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\} = \{A_i \,;\, i \in \mathcal{I}\}$$

družina množic.

Unija družine $\mathcal{A}$ je množica

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x \,;\, \exists i \,(i \in \mathcal{I} \wedge x \in A_i)\}$$

Presek družine $\mathcal{A}$ je množica

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x \,;\, \forall i \,(i \in \mathcal{I} \Rightarrow x \in A_i)\}$$

Pokritje in razbitje

Družina množic $\mathcal{A} = \{A_i \,;\, i \in \mathcal{I}\}$ je *pokritje* množice B, če je

$$B = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i.$$

Družina množic $\mathcal{A} = \{A_i \,;\, i \in \mathcal{I}\}$ je *razbitje* množice B, če je

- $\mathcal{A}$ pokritje množice B
- elementi $\mathcal{A}$ so neprazni in
- elementi $\mathcal{A}$ so paroma disjunktni .

Urejeni pari

Urejeni par s *prvo komponento (koordinato)* a in *drugo komponento (koordinato)* b označimo z (a, b) in definiramo kot

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Trditev

(osnovna lastnost urejenih parov)

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ in } b = d$$

Kartezični produkt

Kartezični produkt množic A in B je množica vseh urejenih parov

$$A \times B = \{(a, b) \; ; \; a \in A \land b \in B\}$$

Kartezični produkt

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ je urejena n-terica.

Definicijo kartezičnega produkta lahko razširimo na več faktorjev.

Lastnosti kartezičnega produkta

- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

Lastnosti kartezičnega produkta

- $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset$
- $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \implies A \times B \subseteq C \times D$
- $A \times B \subseteq C \times D \;\wedge\; A \times B \neq \emptyset \implies A \subseteq C \wedge B \subseteq D$
- A končna z m elementi in B končna z n elementi $\implies$ $A \times B$ končna z $m \cdot n$ elementi.