Prvi izpit iz Numeričnih metod
17. januar 2022

1. **naloga:** Dana je obrnljiva bidiagonalna matrika

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}.$$

   (a) Kaj lahko sklepate o številih $a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_{n-1}$ iz obrnljivosti matrike A?

   (b) Sestavite učinkovit algoritem za reševanje sistema $Ax = b$, kjer je $b \in \mathbb{R}^n$ dan vektor.

   (c) Koliko operacij je potrebnih za izračun inverza A^{-1}?
   (Namig: Inverz A^{-1} dobimo tako, da rešimo n sistemov $Ax = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, kjer so e_i koordinatni vektorji z 1 v i-ti vrstici in 0 v drugih vrsticah.)

Rešitev.

(a) Ker je $\det A = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \neq 0$, so števila $a_1, \ldots, a_n$ neničelna.

(b) Pišimo $b = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}^T$. Sistem $Ax = b$ je oblike

$$\begin{aligned} a_1 x_1 &= b_1, \\ c_1 x_1 + a_2 x_2 &= b_2, \\ c_2 x_2 + a_3 x_3 &= b_3, \\ &\vdots \\ c_{n-1} x_{n-1} + a_n x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Rešitve tega sistema so

$$x_1 = \frac{b_1}{a_1}, \; x_2 = \frac{b_2 - c_1 x_1}{a_2}, \; x_3 = \frac{b_3 - c_2 x_2}{a_3}, \; \ldots, \; x_n = \frac{b_n - c_{n-1} x_{n-1}}{a_n}.$$

(c) Število operacij za reševanje sistema $Ax = b$ je $1 + 3(n-1) = 3n - 2$. Za izračun inverza A^{-1} moramo rešiti n sistemov $Ax = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, kjer so e_i standardni koordinatni vektorji. Število operacij je tako $n(3n-2)$.

2. **naloga:** Naj bo $A > 0$. Dani sta funkciji $f_1(x) = x^2 - A$ in $f_2(x) = x - \dfrac{A}{x}$.

   (a) Funkciji f_1, f_2 imata obe enaki ničli. Kaj sta ti dve ničli?

   (b) Za $A = 6$ s pomočjo 2 korakov tangentne metode za f_1 izračunajte približek za večjo ničlo. Začetni približek sami smiselno izberite.

   (c) Za $A = 6$ s pomočjo 2 korakov metode regula falsi za f_2 izračunajte približek za manjšo ničlo. Začetna približka sami smiselno izberite.

Rešitev.

(a) Iz $f_i(x) = 0$ sledi $x^2 - A = 0$ oz. $x_{1,2} = \pm\sqrt{A}$.

(b) Večja ničla je $\sqrt{6}$. Tangentna metoda ima predpis

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f_1(x_n)}{f_1'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 6}{2x_n}.$$

Za začetni približek izberemo npr. $x_0 = 2$ in dobimo zaporedje približkov $x_1 = 2.500$, $x_2 = 2.450$, $x_3 = 2.449$, $x_4 = 2.449, \ldots$

(c) Manjša ničla je $-\sqrt{6}$. Metoda regula falsi iz približkov a, b, ki zadoščata $f(a)f(b) < 0$, izračuna nov približek po formuli

$$c = b - \frac{f_2(b)(b-a)}{f_2(b) - f_2(a)} = b - \frac{(b - \frac{6}{b})(b-a)}{(b - \frac{6}{b}) - (a - \frac{6}{a})},$$

nato pa nadaljuje postopek z $a = c$, če je $f_2(c)f_2(a) > 0$ oz. $b = c$, če je $f_2(b)f_2(c) > 0$. Za začetna približka izberemo npr. $a = -3$, $b = -2$, saj je $f(-3) = -1$, $f(-2) = 1$ in $f(-3)f(-2) < 0$. Dobimo zaporedje

$$\begin{aligned}
&c = -2.5, \quad f_2(-2.5) = -0.100 \quad \Rightarrow \quad a = -2.5,\\
&c = -2.455, \quad f_2(-2.455) = -0.0101 \quad \Rightarrow \quad a = -2.455,\\
&c = -2.450, \quad f_2(-2.455) = -0.0010 \quad \Rightarrow \quad a = -2.450,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

3. **naloga:** Naj bo f integrabilna funkcija na $[0,1]$, katere integral želimo izračunati po formuli

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \alpha f(0) + \beta f\Big(\frac{2}{3}\Big) + \gamma f(1).$$

(a) Določite $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, da bo formula čim višjega reda.

(b) Izračunajte integral $\int_0^2 e^{x^2} dx$ z dvakratno uporabo zgornje formule s korakom $h = 1$.

(c) Izračunajte integral $\int_0^2 e^{x^2} dx$ s sestavljenim trapeznim pravilom s korakom $h = 1$.

Rešitev.

(a) Ker imamo v metodi 3 proste parametre, jih lahko izberemo tako, da bo metoda reda 2. Za f zaporedoma vstavimo $1, x, x^2$ in dobimo po metodi nedoločenih koeficientov linearni sistem

$$\int_0^1 1dx = [x]_0^1 = 1 = \alpha + \beta + \gamma, \tag{1}$$

$$\int_0^1 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} = \beta\frac{2}{3} + \gamma, \tag{2}$$

$$\int_0^1 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} = \beta\frac{4}{9} + \gamma. \tag{3}$$

Iz (2)–(3) sledi $\frac{2}{9}\beta = \frac{1}{6}$ in zato $\beta = \frac{3}{4}$. Od tod pa sledi $\gamma = 0$ in $\alpha = \frac{1}{4}$.

(b) Velja

$$\begin{aligned}\int_0^2 e^{x^2}dx &= \int_0^1 e^{x^2}dx + \int_1^2 e^{x^2}dx = \int_0^1 e^{x^2}dx + \int_0^1 e^{(\tilde{x}+1)^2}d\tilde{x}\\ &= \frac{1}{4}e^{0^2} + \frac{3}{4}e^{(\frac{2}{3})^2} + \frac{1}{4}e^{1^2} + \frac{3}{4}e^{(\frac{5}{3})^2}\\ &\approx 14.162,\end{aligned}$$

kjer smo v drugi enakosti naredili substitucijo $x = \tilde{x} + 1$, $dx = d\tilde{x}$.

(c) Sestavljeno trapezno pravilo za $f(x) = e^{x^2}$ na intervalu $[0, 2]$ s korakom $h = 1$ je enako

$$\int_0^2 e^{x^2}dx = \frac{1}{2}(e^{0^2} + 2e^{1^2} + e^{2^2}) \approx 30.52.$$