**Drugi izpit iz Numeričnih metod**
27. januar 2022

1. **naloga:** Dani so podatki

| $x$ | $-1$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|
| $y$ | $1$ | $-3$ | $3$ |

Po metodi najmanjših kvadratov želimo podatke aproksimirati s funkcijo

$$f(x) = ax + bx^2.$$

(a) Napišite sistem enačb, ki jih moramo rešiti, v matrični obliki.
(b) Napišite normalni sistem enačb za sistem iz (a).
(c) Rešite normalni sistem sistem iz (b).

**Rešitev.**

(a) Sistem enačb je:

$$\begin{aligned} f(-1) = 1 &\quad\Rightarrow\quad -a + b = 1, \\ f(1) = -3 &\quad\Rightarrow\quad a + b = -3, \\ f(2) = 3 &\quad\Rightarrow\quad 2a + 4b = 3 \end{aligned} \qquad \text{oz.} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}}_{y}$$

(b) Normalni sistem za $Ax = y$ je

$$A^T A x = A^T y \qquad \text{oz.} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(c) Rešitev normalnega sistema $A^T A x = A^T y$ je $a = -1$, $b = 1$.

2. **naloga:** Dana je funkcija $f(x) = xe^{x-1}$, kjer je $x \in \mathbb{R}$.

(a) Izračunajte $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.
(b) Zapišite tabelo deljenih diferenc za $f$ v točkah $x = 0, x = 1, x = 2$.
(c) Določite interpolacijski polinom stopnje 2 v Newtonovi obliki, ki zadošča

$$p(0) = f(0), \quad p(1) = f(1), \quad p(2) = f(2).$$

**Rešitev.**

(a) $f(0) = 0 \cdot e^{-1} = 0$, $f(1) = 1 \cdot e^0 = 1$, $f(2) = 2e$.
(b) Tabela deljenih diferenc je

| $x$ | $f[\cdot]$ | $f[\cdot,\cdot]$ | $f[\cdot,\cdot,\cdot]$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $0$ | | |
| | | $\frac{1-0}{1-0} = 1$ | |
| $1$ | $1$ | | $\frac{(2e-1)-1}{2-0} = e - 1$ |
| | | $\frac{2e-1}{2-1} = 2e - 1$ | |
| $2$ | $2e$ | | |

(c) Interpolacijska polinoma v Newtonovi obliki sta

$$\begin{aligned}p(x) &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (x-0) + (e-1) \cdot (x-0)(x-1) = x + (e-1) \cdot x(x-1),\\ g(x) &= 2e \cdot 1 + (2e-1) \cdot (x-2) + (e-1) \cdot (x-2)(x-1).\end{aligned}$$

3. **naloga:** Naj bo dana diferencialna enačba (DE)

$$y' = \frac{y}{x} + 2x^2, \qquad y(1) = -11. \tag{1}$$

(a) Preverite, da je splošna rešitev DE

$$y = Cx + x^3,$$

kjer je $C$ konstanta. Določite konstanto tako, da bo rešitev zadoščala začetnemu pogoju iz (1).

(b) Z Eulerjevo metodo izračunajte približek za vrednost $y(2)$, pri čemer za korak metode vzemite $h = 0.5$, začnite pa v $x = 1$.

(c) Izračunajte globalno napako metode iz (b) v točki $x = 2$.

**Rešitev.**

(a) Za levo stran enačbe (1) velja

$$y' = (Cx + x^3)' = C + 3x^2,$$

za desno pa

$$\frac{y}{x} + 2x^2 = \frac{Cx + x^3}{x} + 2x^2 = C + x^2 + 2x^2 = C + 3x^2.$$

Torej je $y = Cx + x^3$ res splošna rešitev (1). Konstanto $C$ določimo iz enačbe $y(1) = -11$ in dobimo $C = -12$.

(b) Enačba (1) je oblike $y' = f(x, y)$ za $f(x, y) = \frac{y}{x} + 2x^2$. Po Eulerjevi metodi dobimo aproksimacije:

$$\begin{aligned}y(1.5) &= y(1) + 0.5 \cdot f(1, -11) = -11 + 0.5 \cdot (-9) = -15.50,\\ y(2) &= y(1.5) + 0.5 \cdot f(1.5, -15.5) = -15.5 + 0.5 \cdot (-5.833) = -18.42.\end{aligned}$$

(c) Prava vrednost rešitve v točki $x = 2$ je

$$y(2) = -12 \cdot 2 + 2^3 = -16.$$

Torej je globalna napaka $-18.42 + 16 = -2.42$.