Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

10. oktober 2023

Od zadnjič

- Indukcija.
- Izjave, izjavni vezniki.
- Prednost veznikov, oklepaji.

Današnji program

Izjavni izrazi

Normalni obliki izjavnih izrazov

Izjavni izrazi

1. *Izjavni konstanti* 0 in 1, ki jima pravimo tudi *laž* in *resnica*, sta izjavna izraza.
2. *Izjavne spremenljivke* $p, q, r, \ldots$ so izjavni izrazi.
3. Če je A izjavni izraz, potem je tudi $(\neg A)$ izjavni izraz.
4. Če sta A in B izjavna izraza, potem so tudi

   $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \veebar B)$, $(A \Rightarrow B)$ in $(A \Leftrightarrow B)$

   izjavni izrazi.

Zgledi: 0, 1, p, q, $\neg p$, $p \vee q$,

$\neg p \Rightarrow q$, $q \wedge (p \Rightarrow \neg r)$

$p \Rightarrow q \Rightarrow r$

Konstrukcijsko drevo in resničnostna tabela

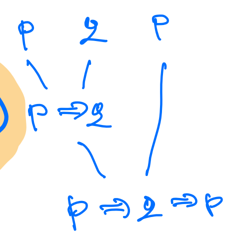
Konstrukcijsko drevo opiše, kako izjavni izraz zgradimo iz bolj enostavnih izjavnih izrazov.

Kdaj izjavni izraz I *nastopa* v izjavnem izrazu J?

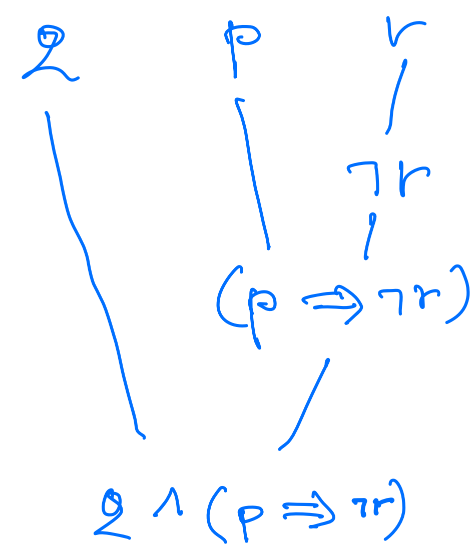
Resničnostna tabela izjavnega izraza za vsak *nabor* logičnih vrednosti izjavnih spremenljivk pove logično vrednost izjavnega izraza.

V $q \land (p \Rightarrow \neg r)$ nastopajo $p, q, r, \neg r, (p \Rightarrow \neg r)$, in $q \land (p \Rightarrow \neg r)$

Ali $q \Rightarrow p$ nastopa v $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$? NE



p	q	r	$\neg r$	$p \Rightarrow \neg r$	$q \land (p \Rightarrow \neg r)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0



V izjavnem izrazu J nastopajo natanko tisti izrazi, ki se pojavijo v konstrukcijskem drevesu J.

Tavtologija in protislovje

pri vseh naborih logičnih vrednosti spremenljivk, ki v njem nastopajo

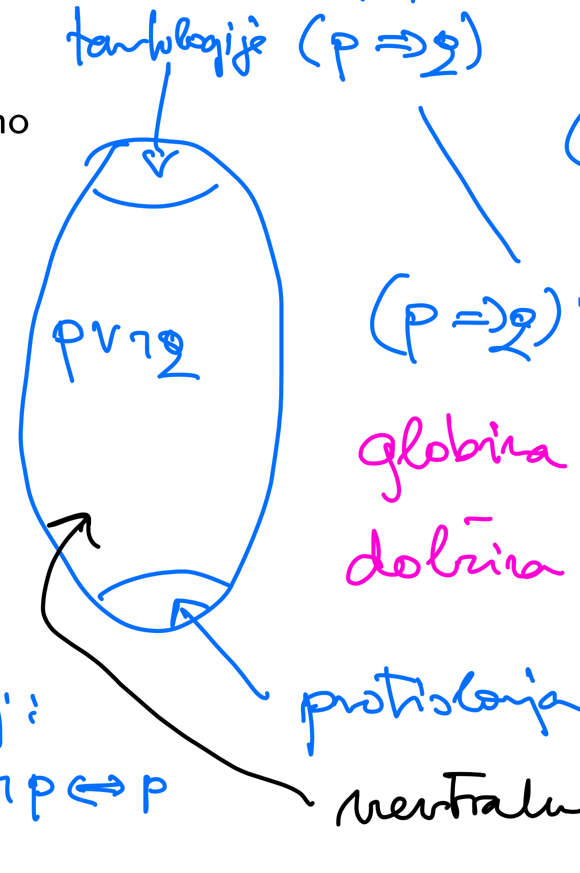
Tavtologija je izjavni izraz, ki je "vedno" resničen.

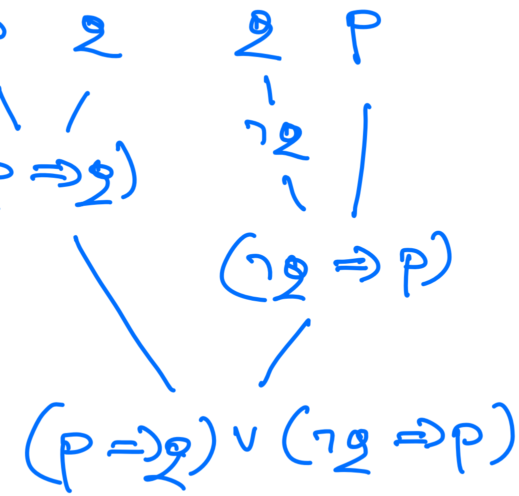
Protislovje je izjavni izraz, ki je "vedno" neresničen.

Izjavni izraz, ki ni niti tavtologija niti protislovje, imenujemo *nevtralni izjavni izraz*.

p	q	$p\Rightarrow q$	$\vee$	$\neg q$	$\neg q\Rightarrow p$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

$(p\Rightarrow q)\vee(\neg q\Rightarrow p)$





globina 3

dolžina 8

Zgledi tavtologij:

1, $p\vee\neg p$, $p\Rightarrow p$, $p\Leftrightarrow p$

$p\Rightarrow(q\Rightarrow p)$

Zgledi protislovij:

0, $p\wedge\neg p$, $\neg p\Leftrightarrow p$

$\neg(p\Rightarrow p)$

Enakovredni izjavni izrazi

Izjavna izraza A in B sta *enakovredna*, če imata pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk enako vrednost.

V tem primeru pišemo $A \sim B$.

$\sim$ je del jezika, v katerem se pogovarjamo o izjavnih izrazih.

$p \quad q \quad r \qquad p \wedge (q \vee r) \qquad \neg(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$

Enakovredni izjavni izrazi

Izrek

Izjavna izraza A in B sta enakovredna natanko tedaj, ko je izraz $A \Leftrightarrow B$ tavtologija.

Izrek

Za enakovrednost izjavnih izrazov veljajo naslednje zveze:

1. $A \sim A$
2. *Če* $A \sim B$*, potem* $B \sim A$.
3. *Če* $A \sim B$ *in* $B \sim C$*, potem* $A \sim C$.

Dokaz.

A in B sta enakovredna ....

A in B imata vedno isto logično vrednost ....

$A \Leftrightarrow B$ je vedno resnična ....

$A \Leftrightarrow B$ je tavtologija. $\blacksquare$

Zakoni izjavnega računa

Dualnost $\wedge$ in $\vee$.

Nekateri pari enakovrednih izjavnih izrazov imajo posebna imena. To so *zakoni izjavnega računa*.

1. Zakon dvojne negacije: $\neg\neg A \sim A$
2. Idempotenca: $A \wedge A \sim A \qquad A \vee A \sim A$
3. Komutativnost: $A \wedge B \sim B \wedge A \qquad A \vee B \sim B \vee A$
   $A \Leftrightarrow B \sim B \Leftrightarrow A$
4. Asociativnost: $(A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C)$
   $(A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$
   $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \sim A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$
5. Absorpcija: $A \wedge (A \vee B) \sim A \qquad A \vee (A \wedge B) \sim A$
6. Distributivnost: $(A \vee B) \wedge C \sim (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
   $(A \wedge B) \vee C \sim (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
7. de Morganova zakona: $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$
   $\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$

$(3+2)+5 = 3+(2+5) = 3+2+5$

$(A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C) \sim A \wedge B \wedge C$

$(3+2)\cdot 5 = (3\cdot 5)+(2\cdot 5)$

A	B	A	$\wedge$	$(A \vee B)$
0	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

A	B	$\neg$	$(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	1	0

8. Kontrapozicija: $A \Rightarrow B \ \sim \ \neg B \Rightarrow \neg A$

9. Lastnosti 0 in 1: $A \Rightarrow A \ \sim \ 1$ $\quad A \Leftrightarrow A \ \sim \ 1$
$A \vee \neg A \ \sim \ 1$ $\quad A \wedge \neg A \ \sim \ 0$

10. Še lastnosti 0 in 1: $A \wedge 0 \ \sim \ 0$ $\quad A \vee 0 \ \sim \ A$
$A \wedge 1 \ \sim \ A$ $\quad A \vee 1 \ \sim \ 1$
$A \Rightarrow 0 \ \sim \ \neg A$ $\quad 0 \Rightarrow A \ \sim \ 1$
$A \Rightarrow 1 \ \sim \ 1$ $\quad 1 \Rightarrow A \ \sim \ A$

11. Lastnosti implikacije: $A \Rightarrow B \ \sim \ \neg A \vee B$
$\neg(A \Rightarrow B) \ \sim \ A \wedge \neg B$

12. Lastnosti ekvivalence: $A \Leftrightarrow B \ \sim \ (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
$A \Leftrightarrow B \ \sim \ (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
$\neg(A \Leftrightarrow B) \ \sim \ \neg A \Leftrightarrow B$

$$\neg B \Rightarrow \neg A \overset{11a}{\sim} \neg\neg B \vee \neg A \overset{1}{\sim} B \vee \neg A \overset{3}{\sim} \neg A \vee B \overset{11a}{\sim} A \Rightarrow B$$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg A \vee B$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Enakovrednost izjavnih izrazov

Kako pokazati, da sta izjavna izraza A in B enakovredna?

Kako pokazati, da izjavna izraza A in B nista enakovredna?

$p \wedge (q \vee r) \qquad \neg(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$ $\longleftarrow$ sta enakovredna

$$\neg(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r) \overset{11a}{\sim}$$
$$\neg\neg(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \overset{1}{\sim}$$
$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \overset{6}{\sim}$$
$$p \wedge (q \vee r)$$

$(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$	p	q
$\underbrace{\underbrace{0 \quad 0}_{1} \quad 0}_{0}$	$\underbrace{0 \quad \underbrace{0 \quad 0}_{1}}_{1}$	0	0

Naloga

Poišči izjavni izraz s predpisano resničnostno tabelo:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

A je resničen

samo v 2. vrstici ALI
samo v 4. vrstici ALI
samo v 5. vrstici ALI
samo v 6. vrstici ALI
samo v 8. vrstici.

p je lažen in q je lažen in r je resničen ALI
p je lažen in q je resničen in r je resničen ALI
p je res in q je lažen in r je lažen ALI
p je res in q je lažen in r je res ALI
p je res in q je res in r je res.

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

Disjunktivna normalna oblika

Disjunktivna normalna oblika (DNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{DNO}, za katerega velja:

- $A \sim A_{DNO}$
- A_{DNO} je disjunkcija osnovnih konjunkcij.

Osnovna konjunkcija je konjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij.
A_{DNO} *lahko* zgradimo tako, da za vsak nabor pravilnostne tabele, pri katerem je izraz A resničen, pripravimo eno osnovno konjunkcijo. V njej nastopajo v tem naboru resnične spremenljivke in negacije v tem naboru lažnih spremenljivk.

Ista naloga, drugič

Poišči izjavni izraz s predpisano resničnostno tabelo:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

A je resničen ntk

Nismo v 1. vrstici IN

nismo v 3. vrstici IN

nismo v 7. vrstici

ntk

p je res ali q je res ali r je res IN

p je res ali q je lažen ali r je res IN

p je lažen ali q je lažen ali r je res. ntk

$$(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee\neg q\vee r)\wedge(\neg p\vee\neg q\vee r)\sim$$

$$((p\vee q)\wedge(p\vee\neg q)\wedge(\neg p\vee\neg q))\vee r\sim$$

$$((p\vee\cancel{(q\wedge\neg q)})\wedge(\neg p\vee\neg q))\vee r\sim$$

$$(p\wedge(\neg p\vee\neg q))\vee r\sim$$

$$(\cancel{(p\wedge\neg p)}\vee(p\wedge\neg q))\vee r\sim$$

$$(p\wedge\neg q)\vee r\sim\neg\neg(p\wedge\neg q)\vee r\sim\neg(\neg p\vee q)\vee r\sim$$

2x uporabim 11a

$$(p\Rightarrow q)\Rightarrow r\sim$$

$$p\Rightarrow q\Rightarrow r$$

Veitchev diagram pridela to rešitev

Konjunktivna normalna oblika

Konjunktivna normalna oblika (KNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{KNO}, za katerega velja:

- $A \sim A_{KNO}$
- A_{KNO} je konjunkcija osnovnih disjunkcij.

Osnovna disjunkcija je disjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij.
A_{KNO} *lahko* zgradimo tako, da za vsak nabor pravilnostne tabele, pri katerem je izraz A neresničen, pripravimo eno osnovno disjunkcijo. V njej nastopajo v tem naboru lažne spremenljivke in negacije v tem naboru resničnih spremenljivk.

Kdaj KNO in DNO

Trditev

Vsak izjavni izraz ima DNO in
Vsak izjavni izraz ima KNO.

Kako dobimo DNO protislovja? Kako dobimo KNO tavtologije?

Posledica

Za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B, ki vsebuje samo veznike $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Dokaz. Morda problem DNO protislovja
KNO tavtologije.

DNO z eno
samo osn.
konj.

$(p \wedge \neg p)$

$(p \vee \neg p)$

$(p) \vee (\neg p)$

Polni nabori izjavnih veznikov

Družina izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ je *poln nabor izjavnih veznikov*, če za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B, ki vsebuje samo veznike iz $\mathcal{N}$.

$\{\neg, \wedge, \vee\}$ je poln nabor izjavnih veznikov.

Zakaj sploh $\veebar$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$?

Polni nabori izjavnih veznikov

Nekaj drugih polnih naborov izjavnih veznikov:

$$\{\neg, \vee\}\ , \quad \{\neg, \wedge\}, \quad \{\neg, \Rightarrow\}\ , \quad \{0, \Rightarrow\}$$

Dokaz (polnosti nabora $\{\neg, \vee\}$)

Pokazati je treba, da lahko vsako izjavno formulo A enakovredno izrazimo samo z $\neg$ in $\vee$.

Vemo: A lahko enakovredno izrazimo samo z uporabo $\neg, \wedge, \vee$. Obstaja A'

Znan poln nabor

- $A' \sim A$
- A' uporabi samo $\neg, \wedge, \vee$.

Torej vsako konjunkcijo v A' lahko odpravimo

$$p \wedge q \sim \neg\neg(p \wedge q) \sim \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$\neg p \sim \neg p$$

$$p \vee q \sim p \vee q$$

Polni nabori izjavnih veznikov

Vprašanje:
Kako v praksi pokazati, da je nabor izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ poln?

1. Izberemo znan poln nabor izjavnih veznikov $\mathcal{Z}$.
2. Vsak veznik iz znanega nabora $\mathcal{Z}$ izrazimo samo z uporabo veznikov iz $\mathcal{N}$.

$\{\neg, \wedge\}$ ✓ izberemo znan poln nabor $\{\neg, \wedge, \vee\}$

$p \vee q \sim \neg\neg(p \vee q) \sim \neg(\neg p \wedge \neg q)$

$\{\neg, \Rightarrow\}$ ✓ izberem znan poln nabor $\{\neg, \vee\}$

$p \vee q \sim \neg(\neg p) \vee q \sim \neg p \Rightarrow q$

$\{0, \Rightarrow\}$ izberem znan poln nabor $\{\neg, \Rightarrow\}$

$\neg p \sim \neg p \vee 0 \sim p \Rightarrow 0$

Polni nabori izjavnih veznikov

Vprašanje:
Kako v praksi pokazati, da nabor izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ ni poln?
Težko.

$\{\vee, \Rightarrow\}$ ni poln

$$\neg p \not\sim \underbrace{((p \Rightarrow q) \vee r) \Rightarrow ((p \Rightarrow t) \vee q) \vee r}_{1}$$

$\neg p$: $p = 1$, $\neg p = 0$

$1 \vee 1 \sim 1$

$1 \Rightarrow 1 \sim 1$

$\{\Rightarrow, \Leftrightarrow\}$

$\{\wedge, \vee\}$

Oba $\vee, \Rightarrow$ ohranjata logično vrednost 1.

$\{\vee, \Rightarrow\}$ ohranja log. vr. 1

$\{\neg, \Leftrightarrow\}$ ni poln.

Ekskluzivna disjunkcija

Trditev

Izraz

$$A_1 \veebar A_2 \veebar A_3 \veebar \ldots \veebar A_n$$

je, ne glede na to, kako so postavljeni oklepaji, resničen natanko tedaj, ko je liho mnogo členov izmed

$$A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots, A_n$$

resničnih.