Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

8. oktober 2024

Od zadnjič

orodje za dokazovanje trditev, ki veljajo za "vsa" naravna števila

- Indukcija.

$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

$\underline{\vee}$

- Izjave, izjavni vezniki.
- Prednost veznikov, oklepaji.

dogovor o opuščanju oklepajev

$(A \wedge B) \Rightarrow C \qquad (A \Rightarrow B) \Rightarrow C$

Današnji program

Izjavni izrazi

$2+3$

$2 \cdot 3 + 5$

$2 \cdot x + 3$

$3x + 7$

Normalni obliki izjavnih izrazov

Izjavni izrazi

1. *Izjavni konstanti* 0 in 1, ki jima pravimo tudi *laž* in *resnica*, sta izjavna izraza.
2. *Izjavne spremenljivke* $p, q, r, \ldots$ so izjavni izrazi.
3. Če je A izjavni izraz, potem je tudi $(\neg A)$ izjavni izraz.
4. Če sta A in B izjavna izraza, potem so tudi

$$(A \wedge B)\,, \quad (A \vee B)\,, \quad (A \veebar B)\,, \quad (A \Rightarrow B) \quad \text{in} \quad (A \Leftrightarrow B)$$

izjavni izrazi.

1. 0

2. $p, q, r, \ldots$

4. $A, B, \ldots$

$A \Rightarrow B$

Zgledi: $0, 1, p, q, r$, $(0 \wedge 1)$, $0 \wedge 1$, $p \vee r$, $(q \Rightarrow p \vee r)$

Konstrukcijsko drevo in resničnostna tabela

$A = q \wedge (p \Rightarrow \neg r)$

Konstrukcijsko drevo opiše, kako izjavni izraz zgradimo iz bolj enostavnih izjavnih izrazov.

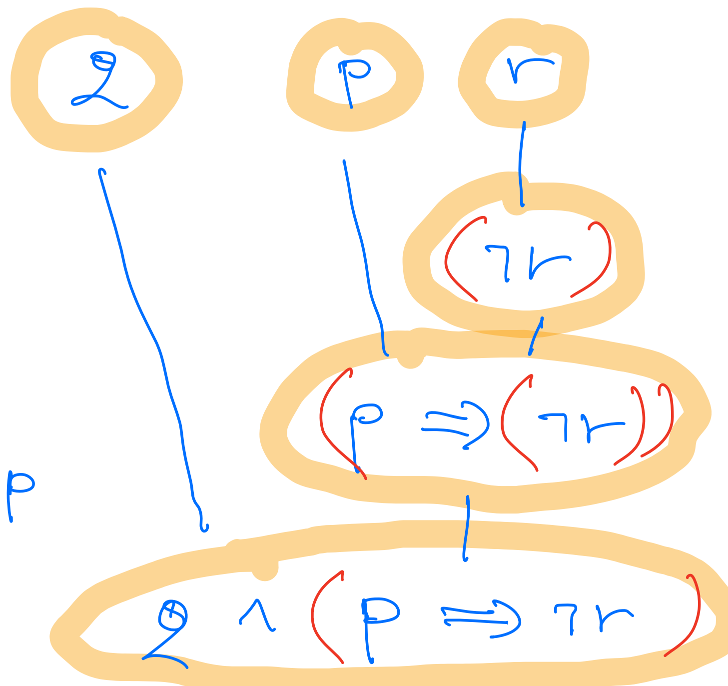
Kdaj izjavni izraz I *nastopa* v izjavnem izrazu J?

takrat, ko je I "vozlišče" v konstr. drevesu J.

- globina izjavnega izraza
  "najdaljši sprehod navzdol v konstr. drevesu"

- dolžina izjavnega izraza
  "število spremenljivk in veznikov v zapisu"

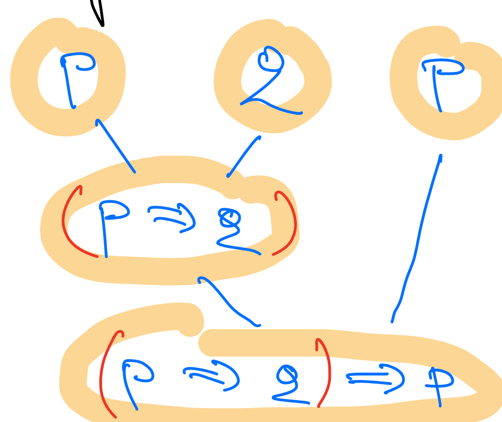
$p \wedge p$



$p \Rightarrow q \Rightarrow p$

v ↑ izraz $q \Rightarrow p$

NE nastopa



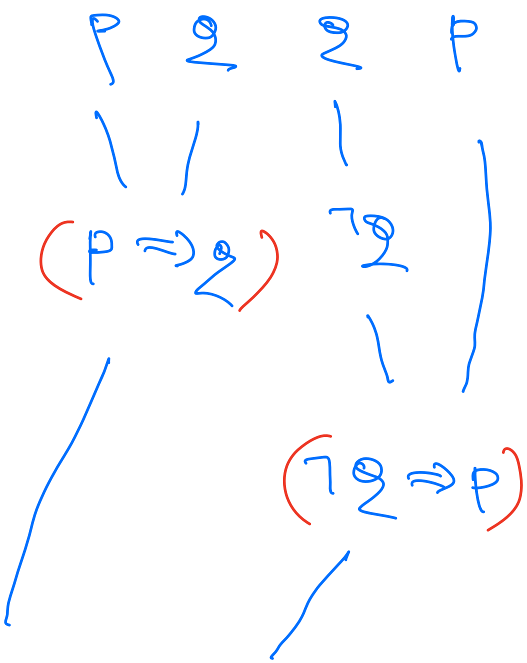
Konstrukcijsko drevo in resničnostna tabela

Konstrukcijsko drevo opiše, kako izjavni izraz zgradimo iz bolj enostavnih izjavnih izrazov.

Kdaj izjavni izraz I *nastopa* v izjavnem izrazu J?

Resničnostna tabela izjavnega izraza za vsak *nabor* logičnih vrednosti izjavnih spremenljivk pove logično vrednost izjavnega izraza.

p	q	r	$\neg r$	$p \Rightarrow \neg r$	$q \wedge (p \Rightarrow \neg r)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0



p	q	$(p \Rightarrow q)$	$\vee$	$\neg q$	$(\neg q \Rightarrow p)$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1

Tavtologija in protislovje

Tavtologija je izjavni izraz, ki je "vedno" resničen.

Protislovje je izjavni izraz, ki je "vedno" neresničen.

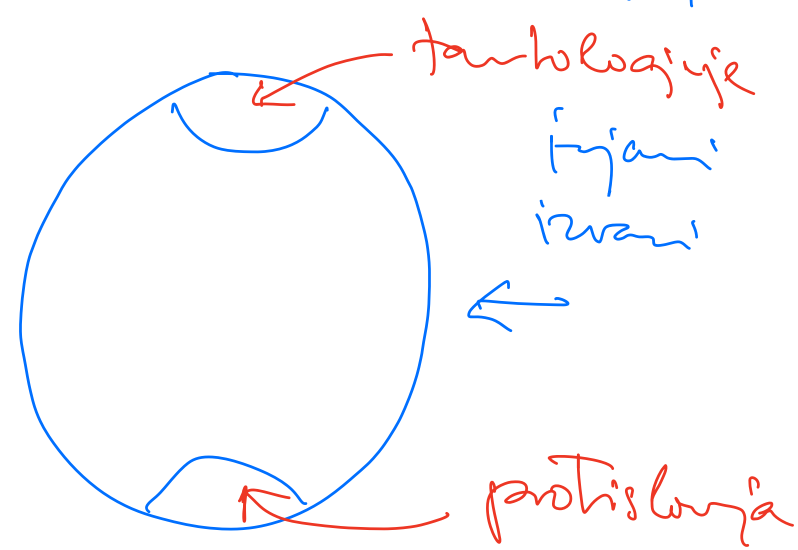
Izjavni izraz, ki ni niti tavtologija niti protislovje, imenujemo *nevtralni izjavni izraz*.

Zgledi tavtologij: $p \vee \neg p$, $p \Rightarrow p$, $p \Leftrightarrow p$, 1

$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$

Zgledi protislovij: $p \wedge \neg p$, $\neg(p \Rightarrow p)$, $p \Leftrightarrow \neg p$, 0

$p \wedge q$, $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p$



Enakovredni izjavni izrazi

Izjavna izraza A in B sta *enakovredna*, če imata pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk enako vrednost.

V tem primeru pišemo $A \sim B$.

$$p \Rightarrow p \sim p \Leftrightarrow p$$

$$2x + 1 = x + 1 + x$$

$$p \wedge \neg p \sim \neg q \Leftrightarrow q$$

p	q	$\neg p \vee q$	$p \Rightarrow q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

$$p \Rightarrow q \sim \neg p \vee q$$

Enakovredni izjavni izrazi

Izrek

Izjavna izraza A in B sta enakovredna natanko tedaj, ko je izraz $A \Leftrightarrow B$ tavtologija.

Izrek

Za enakovrednost izjavnih izrazov veljajo naslednje zveze:

1. $A \sim A$
2. *Če* $A \sim B$, *potem* $B \sim A$.
3. *Če* $A \sim B$ *in* $B \sim C$, *potem* $A \sim C$.

Dokaz: A in B sta enakovredna ....

A in B imata "vedno" isto logično vrednost ....

$A \Longleftrightarrow B$ je "vedno" resnična ....

$A \Longleftrightarrow B$ je tavtologija

Zakoni izjavnega računa

Nekateri pari enakovrednih izjavnih izrazov imajo posebna imena. To so *zakoni izjavnega računa*.

1. Zakon dvojne negacije: $\neg\neg A \sim A$
2. Idempotenca: $A \wedge A \sim A \qquad A \vee A \sim A$
3. Komutativnost: $A \wedge B \sim B \wedge A \qquad A \vee B \sim B \vee A$
   $A \Leftrightarrow B \sim B \Leftrightarrow A$
4. Asociativnost: $(A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C)$
   $(A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$
   $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \sim A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$
5. Absorpcija: $A \wedge (A \vee B) \sim A \qquad A \vee (A \wedge B) \sim A$
6. Distributivnost: $(A \vee B) \wedge C \sim (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
   $(A \wedge B) \vee C \sim (A \vee C) \wedge (B \vee C)$
7. de Morganova zakona: $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$
   $\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$

$p \wedge (p \vee q) \sim p$

$p \vee (p \wedge q) \sim p$

$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

$\cancel{(x \cdot y) + z \neq (x+z) \cdot (y+z)}$

$\wedge$, $\vee$ sta "dualni" logični operaciji

8. Kontrapozicija: $A \Rightarrow B \sim \neg B \Rightarrow \neg A$

9. Lastnosti 0 in 1: $A \Rightarrow A \sim 1$ $\quad A \Leftrightarrow A \sim 1$
$A \vee \neg A \sim 1$ $\quad A \wedge \neg A \sim 0$

10. Še lastnosti 0 in 1: $A \wedge 0 \sim 0$ $\quad A \vee 0 \sim A$
$A \wedge 1 \sim A$ $\quad A \vee 1 \sim 1$
$A \Rightarrow 0 \sim \neg A$ $\quad 0 \Rightarrow A \sim 1$
$A \Rightarrow 1 \sim 1$ $\quad 1 \Rightarrow A \sim A$

11. Lastnosti implikacije: $A \Rightarrow B \sim \neg A \vee B$
$\neg(A \Rightarrow B) \sim A \wedge \neg B$

12. Lastnosti ekvivalence: $A \Leftrightarrow B \sim (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
$A \Leftrightarrow B \sim (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
$\neg(A \Leftrightarrow B) \sim \neg A \Leftrightarrow B$

$$\neg(A \Rightarrow B) \overset{11.a}{\sim} \neg(\neg A \vee B) \overset{7a}{\sim} \neg\neg A \wedge \neg B \overset{1}{\sim} A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \overset{\text{kom}}{\sim} \neg(B \Leftrightarrow A) \overset{12.c}{\sim} \neg B \Leftrightarrow A \overset{\text{kom}}{\sim} A \Leftrightarrow \neg B$$

$$A \Leftrightarrow B \sim \neg A \Leftrightarrow \neg B \sim \neg(A \Leftrightarrow \neg B) \sim \neg(\neg B \Leftrightarrow A) \sim$$
$$\sim \neg\neg(B \Leftrightarrow A) \sim A \Leftrightarrow B$$

Enakovrednost izjavnih izrazov

preverimo enakost pravilnostnih tabel

prevedba z zakoni izjavnega računa

Kako pokazati, da sta izjavna izraza A in B enakovredna?

Kako pokazati, da izjavna izraza A in B nista enakovredna?

p	q	$q \Rightarrow p$	$\not\sim$	$\neg p \vee \neg q$
1	1	1		0

p	q	r	$p \vee q$	$\not\sim$	$p \vee r$
0	0	1	0		1

$$2 + x \neq 2 + y$$

Naloga

Poišči izjavni izraz s predpisano resničnostno tabelo:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

A je resničen ntk.

smo v 2. vrstici ali
smo v 4. vrstici ali
smo v 5. vrstici ali
smo v 6. vrstici ali
smo v 8. vrstici

ntk.

p je lažen in q je lažen in r je res ali
p je lažen in q je res in r je res ali
p je res in q je lažen in r je lažen ali
p je res in q je lažen in r je res ali
p je res in q je res in r je res.

ntk.

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

Disjunktivna normalna oblika

Disjunktivna normalna oblika (DNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{DNO}, za katerega velja:

- $A \sim A_{DNO}$
- A_{DNO} je disjunkcija osnovnih konjunkcij.

Osnovna konjunkcija je konjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij.
A_{DNO} *lahko* zgradimo tako, da za vsak nabor pravilnostne tabele, pri katerem je izraz A resničen, pripravimo eno osnovno konjunkcijo. V njej nastopajo v tem naboru resnične spremenljivke in negacije v tem naboru lažnih spremenljivk.

$p \Rightarrow q \quad \sim \quad (\neg p) \vee (q)$

$\sim (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q)$

Ista naloga, drugič

Poišči izjavni izraz s predpisano resničnostno tabelo:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

A je resnica ntk.

Nismo v 1. vrstici in
nismo v 3. vrstici in
nismo v 7. vrstici. ntk.

p je res ali q je res ali r je res in
p je res ali q je laž ali r je res in
p je laž ali q je laž ali r je res. ntk.

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

Konjunktivna normalna oblika

Konjunktivna normalna oblika (KNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{KNO}, za katerega velja:

- $A \sim A_{KNO}$
- A_{KNO} je konjunkcija osnovnih disjunkcij.

Osnovna disjunkcija je disjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij.

A_{KNO} *lahko* zgradimo tako, da za vsak nabor pravilnostne tabele, pri katerem je izraz A neresničen, pripravimo eno osnovno disjunkcijo. V njej nastopajo v tem naboru lažne spremenljivke in negacije v tem naboru resničnih spremenljivk.

$$p \Rightarrow q \quad \sim \quad (\neg p) \vee (q) \quad \sim \quad (\neg p \vee q)$$

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \sim$$

izpostavimo $\vee r$ distr.

$$((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r \sim$$

izpostavimo $p \vee$

$$((p \vee \overset{0}{\cancel{(q \wedge \neg q)}})) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r \sim$$

distributivnost

$$(p \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r \sim$$

$$(\overset{0}{\cancel{(p \wedge \neg p)}} \vee (p \wedge \neg q)) \vee r \sim$$

$$(p \wedge \neg q) \vee r \sim$$

dvojna negacija

$$\neg\neg(p \wedge \neg q) \vee r \sim$$

de Morgan

$$\neg(\neg p \vee q) \vee r \overset{11.a}{\sim} \neg(p \Rightarrow q) \vee r \overset{11a}{\sim} (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

$$\sim p \Rightarrow q \Rightarrow r$$

Kdaj KNO in DNO

$(p \wedge \neg p)$ $(p \vee \neg p)$

Trditev

Vsak izjavni izraz ima DNO in
Vsak izjavni izraz ima KNO.

Kako dobimo DNO protislovja? Kako dobimo KNO tavtologije?

Posledica

Za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B, ki vsebuje samo veznike $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Polni nabori izjavnih veznikov

Družina izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ je *poln nabor izjavnih veznikov*, če za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B, ki vsebuje samo veznike iz $\mathcal{N}$.

$\{\neg, \wedge, \vee\}$ je poln nabor izjavnih veznikov.

$A \; \text{- - - -} \; A_{DNO}$

$A \sim A_{DNO}$

A_{DNO} uporablja samo $\neg, \wedge, \vee$

Polni nabori izjavnih veznikov

Nekaj drugih polnih naborov izjavnih veznikov:

$$\{\neg, \vee\}, \quad \{\neg, \wedge\}, \quad \{\neg, \Rightarrow\}, \quad \{0, \Rightarrow\}$$

Dokaz: $\{\neg, \vee\}$ je poln nabor

izberimo poljuben izjavni izraz A.

A_{DNO} je izjavni izraz, $A \sim A_{DNO}$ in uporablja samo $\neg, \wedge, \vee$.

Kako se znebiti konjunkcij?

$$p \wedge q \sim \neg\neg(p \wedge q) \sim \neg(\neg p \vee \neg q)$$

konjunkcijo lahko izrazim že zgolj z uporabo $\neg, \vee$.

S takšnim "postopkom" lahko A_{DNO} elaborirano prepišem v izraz A', ki uporablja samo $\neg, \vee$. ∎

Polni nabori izjavnih veznikov

Vprašanje:
Kako v praksi pokazati, da je nabor izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ poln?

1. Izberemo znan poln nabor izjavnih veznikov $\mathcal{Z}$.
2. Vsak veznik iz znanega nabora $\mathcal{Z}$ izrazimo samo z uporabo veznikov iz $\mathcal{N}$.

$\mathcal{Z}$

$\{\neg, \vee\}$ ..... $\{\neg, \wedge, \vee\}$ $\qquad p \wedge q \sim \neg\neg(p \wedge q) \sim \neg(\neg p \vee \neg q)$

$\{\neg, \wedge\}$ ..... $\{\neg, \wedge, \vee\}$ $\qquad p \vee q \sim \neg\neg(p \vee q) \sim \neg(\neg p \wedge \neg q)$

$\{\neg, \Rightarrow\}$ ..... $\{\neg, \vee\}$ $\qquad p \vee q \sim \neg\neg p \vee q \sim \neg p \Rightarrow q$

$\{0, \Rightarrow\}$ ..... $\{\neg, \Rightarrow\}$ $\qquad \neg p \sim p \Rightarrow 0$

Polni nabori izjavnih veznikov

Vprašanje:
Kako v praksi pokazati, da nabor izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ ni poln?

Ekskluzivna disjunkcija

Trditev

Izraz

$$A_1 \veebar A_2 \veebar A_3 \veebar \ldots \veebar A_n$$

je, ne glede na to, kako so postavljeni oklepaji, resničen natanko tedaj, ko je liho mnogo členov izmed

$$A_1,\ A_2,\ A_3, \ldots, A_n$$

resničnih.