

Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

7. oktober 2025

Od zadnjič

- ▶ Indukcija.
- ▶ Izjave, izjavni vezniki.
- ▶ Prednost veznikov, oklepaji.

← ovdje se dokazuje inditve "za vsa naravna števila"

← $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$

↑ $((A \wedge B) \Rightarrow (C \vee (\neg D))) \Leftrightarrow E$

Izjavni izrazi

1. *Izjavni konstanti* 0 in 1, ki jima pravimo tudi *laž* in *resnica*, sta izjavna izraza.
2. *Izjavne spremenljivke* $p, q, r, \dots$ so izjavni izrazi.
3. Če je A izjavni izraz, potem je tudi $(\neg A)$ izjavni izraz.
4. Če sta A in B izjavna izraza, potem so tudi

$$(A \wedge B), (A \vee B), (A \sqcup B), (A \Rightarrow B) \text{ in } (A \Leftrightarrow B)$$

izjavni izrazi.

$$\neg p = (\neg p)$$

Izjavni izrazi: $0, 1, p, q, r, (\neg p), (p \Rightarrow q),$
 $p \Rightarrow \neg r, q \wedge (p \Rightarrow \neg r)$

Konstrukcijsko drevo in resničnostna tabela

Konstrukcijsko drevo opiše, kako izjavni izraz zgradimo iz bolj enostavnih izjavnih izrazov.

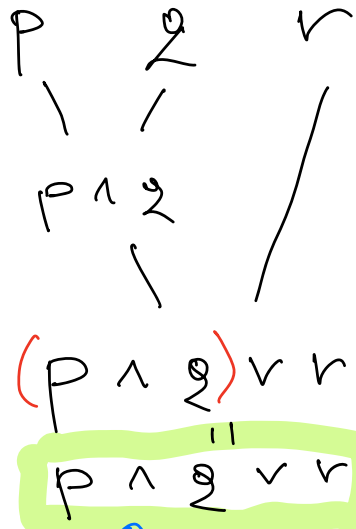
Kdaj izjavni izraz I *nastopa* v izjavnem izrazu J ?

Resničnostna tabela izjavnega izraza za vsak *nabor* logičnih vrednosti izjavnih spremenljivk pove logično vrednost izjavnega izraza.

Natanšo kedri, ko je I moč
najti v koškatih
drevnem inra J.

52 (Dobrina izjanege izra.
Glozine izjanege izra.

26



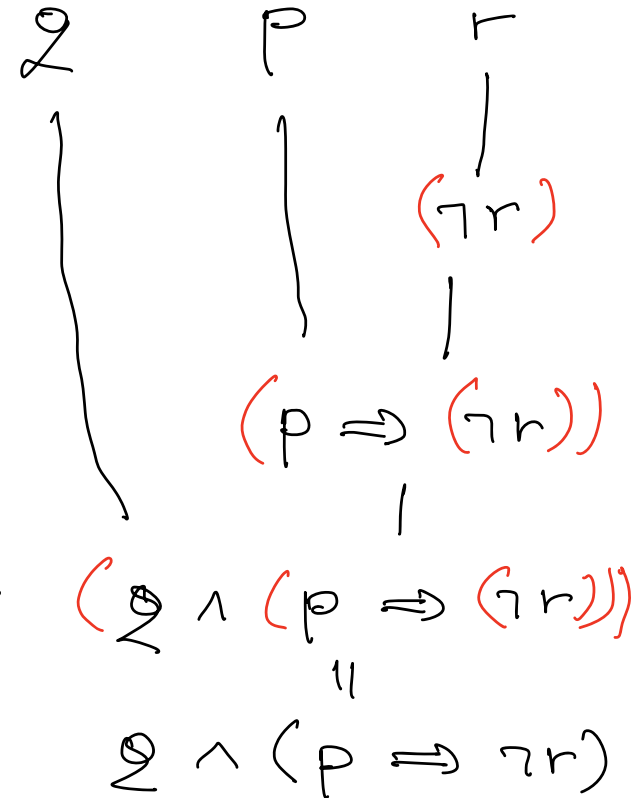
↳ most popular

$$p, q, r, p \wedge q, p \wedge q \vee r,$$

$V \models (p \Rightarrow r)$
verdadeiro

 $Q, P, r, \tau r,$
$$p \Rightarrow \neg r,$$
$$2 \wedge (p \Rightarrow r)$$

12m over pan
p1 over NE
Mastopa.



p	q	r	$\neg r$	$p \Rightarrow \neg r$	$q \wedge (p \Rightarrow \neg r)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0

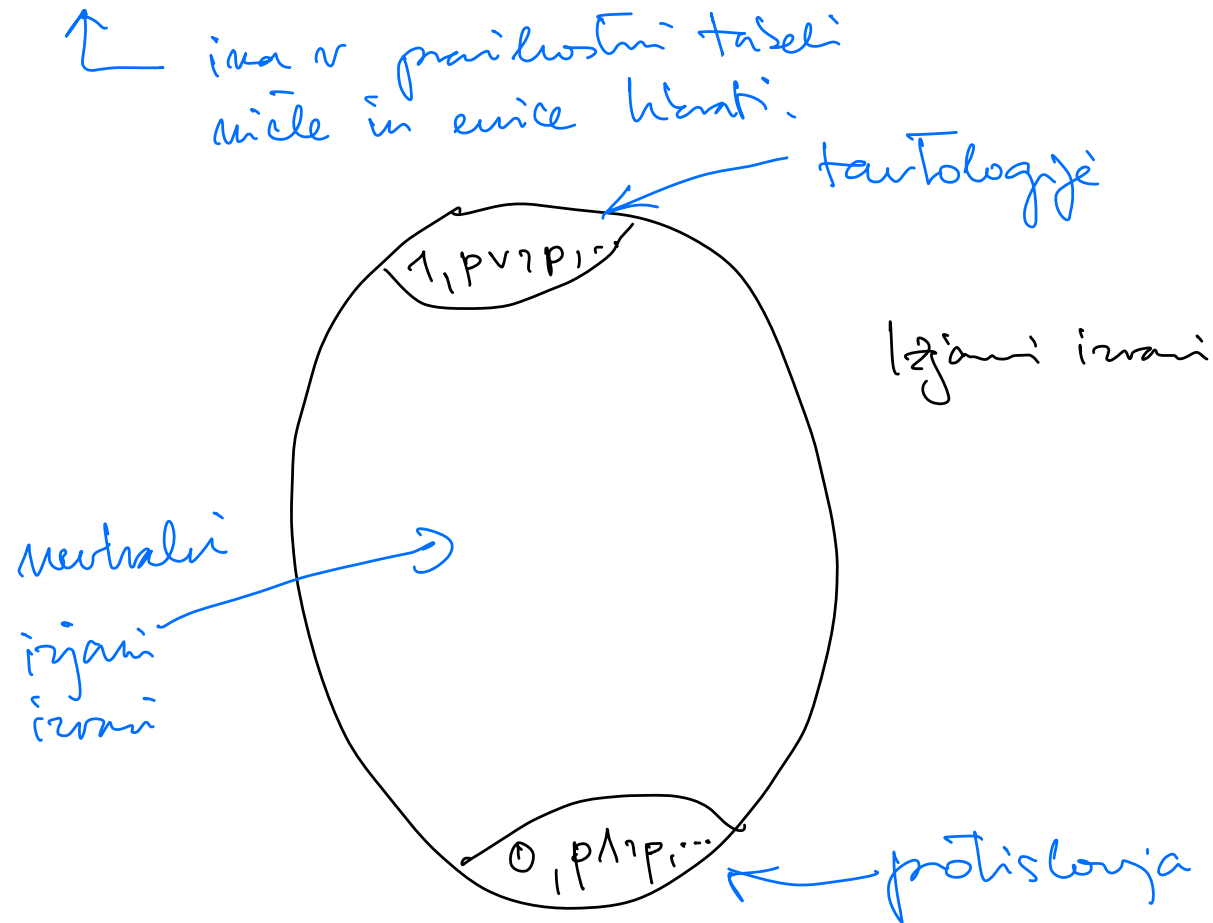
p	q	$(p \Rightarrow q)$	$(\neg q \Rightarrow p)$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Tavtologija in protislovje

Tavtologija je izjavni izraz, ki je "vedno" resničen.

Protislovje je izjavni izraz, ki je "vedno" neresničen.

Izjavni izraz, ki ni niti tautologija niti protislovje, imenujemo **nevtralni izjavni izraz**.



Tavtologije:

$$1, p \vee \neg p,$$

$$p \Rightarrow p, p \Leftrightarrow p,$$

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$$

Protislovja:

$$0, p \wedge \neg p,$$

$$(p \Rightarrow q) \wedge \neg (p \Rightarrow q),$$

$$\neg (p \Rightarrow p), \neg (p \Leftrightarrow p),$$

$$\neg p \Leftrightarrow p$$

Enakovredni izjavni izrazi

Izjavna izraza A in B sta *enakovredna*, če imata pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk enako vrednost.

V tem primeru pišemo $A \sim B$.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

$$p \Rightarrow q \sim \neg p \vee q$$

Enakovredni izjavni izrazi

Izrek

Izjava izraza A in B sta enakovredna natanko tedaj, ko je izraz $A \Leftrightarrow B$ tautologija.

Izrek

Za enakovrednost izjavnih izrazov veljajo naslednje zveze:

1. $A \sim A$
2. Če $A \sim B$, potem $B \sim A$.
3. Če $A \sim B$ in $B \sim C$, potem $A \sim C$.

Dokaz.

$A \sim B$

A in B imata "vedno" isto logično vrednost

$A \Leftrightarrow B$ je "vedno" resnica

$A \Leftrightarrow B$ je tautologija.



Zakoni izjavnega računa

Nekateri pari enakovrednih izjavnih izrazov imajo posebna imena.

To so *zakoni izjavnega računa*.

1. Zakon dvojne negacije: $\neg\neg A \sim A$



$\neg\neg p \sim p$
 $\neg\neg q \sim q$
 $\neg\neg (p \Rightarrow q) \sim p \Rightarrow q$

2. Idempotenca: $A \wedge A \sim A$ $A \vee A \sim A$

3. Komutativnost: $A \wedge B \sim B \wedge A$ $A \vee B \sim B \vee A$
 $A \Leftrightarrow B \sim B \Leftrightarrow A$

4. Asociativnost: $(A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C)$
 $(A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$
 $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \sim A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$

5. Absorpcija: $A \wedge (A \vee B) \sim A$ $A \vee (A \wedge B) \sim A$

6. Distributivnost: $(A \vee B) \wedge C \sim (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$
 $(A \wedge B) \vee C \sim (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

$$(5 + 3) \cdot 2 = (5 \cdot 2) + (3 \cdot 2)$$

7. de Morganova zakona: $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B$
 $\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B$

$\wedge$ in $\vee$ nastopata
"dualno"

p	q	$p \wedge (p \vee q)$			p
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1

8. Kontrapozicija: $A \Rightarrow B \sim \neg B \Rightarrow \neg A$

9. Lastnosti 0 in 1: $A \Rightarrow A \sim 1$ $A \Leftrightarrow A \sim 1$
 $A \vee \neg A \sim 1$ $A \wedge \neg A \sim 0$

10. Še lastnosti 0 in 1: $A \wedge 0 \sim 0$ $A \vee 0 \sim A$
 $A \wedge 1 \sim A$ $A \vee 1 \sim 1$
 $A \Rightarrow 0 \sim \neg A$ $0 \Rightarrow A \sim 1$
 $A \Rightarrow 1 \sim 1$ $1 \Rightarrow A \sim A$

11. Lastnosti implikacije: $A \Rightarrow B \sim \neg A \vee B$
 $\neg(A \Rightarrow B) \sim A \wedge \neg B$

12. Lastnosti ekvivalence: $A \Leftrightarrow B \sim (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$
 $A \Leftrightarrow B \sim (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
 $\neg(A \Leftrightarrow B) \sim \neg A \Leftrightarrow B \sim A \Leftrightarrow \neg B$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

$$\neg(A \Rightarrow B) \stackrel{11a}{\sim} \neg(\neg A \vee B) \stackrel{7a}{\sim} \neg\neg A \wedge \neg B \stackrel{1}{\sim} A \wedge \neg B$$

Enakovrednost izjavnih izrazov

Kako pokazati, da sta izjavna izraza A in B enakovredna?

Kako pokazati, da izjavna izraza A in B **nista** enakovredna?

primerjamo pravihostni
tabele, če sta enaki.

s preizkusom, uporabimo
založne izjave istega načina

bolj preprosto: ena sama tabela logičnih
vrednosti spremlja, pri kateri imata A in B
različni logični vrednosti.

Naloga

Poišči izjavni izraz s predpisano resničnostno tabelo:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

A je resničen

*Sno v 2. stolici ali
sno v 4. stolici ali
sno v 5. stolici ali
sno v 6. stolici ali
sno v 8. stolici, ...*

*p je lažen in q je lažen in r je resničen ali
p je lažen in q je res in r je res ali
p je res in q je lažen in r je lažen ali
p je res in q je lažen in r je res ali
p je res in q je res in r je res, ...*

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee \\ (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$$

Disjunktivna normalna oblika

Disjunktivna normalna oblika (DNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{DNO} , za katerega velja:

- ▶ $A \sim A_{DNO}$
- ▶ A_{DNO} je disjunkcija osnovnih konjunkcij.

Osnovna konjunkcija je konjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij.

A_{DNO} lahko zgradimo tako, da za vsak nabor pravilnostne tabele, pri katerem je izraz A resničen, pripravimo eno osnovno konjunkcijo. V njej nastopajo v tem naboru resnične spremenljivke in negacije v tem naboru lažnih spremenljivk.

Ista naloga, drugač

Poišči izjavni izraz s predpisano resničnostno tabelo:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

A je resnica

Niso v 1. vrstici in

niso v 3. vrstici in

niso v 7. vrstici.

p je res ali q je res ali r je res in

p je res ali q je lažja ali r je res in

p je lažja ali q je lažja ali r je res.

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

Konjunktivna normalna oblika

Konjunktivna normalna oblika (KNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{KNO} , za katerega velja:

- ▶ $A \sim A_{KNO}$
- ▶ A_{KNO} je konjunkcija osnovnih disjunkcij.

Osnovna disjunkcija je disjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij.

A_{KNO} lahko zgradimo tako, da za vsak nabor pravilnostne tabele, pri katerem je izraz A neresničen, pripravimo eno osnovno disjunkcijo. V njej nastopajo v tem naboru lažne spremenljivke in negacije v tem naboru resničnih spremenljivk.

$$\begin{aligned} p \Rightarrow q & \sim (\neg p) \vee q \\ & \sim (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge q) \\ & \sim (\neg p \vee q) \end{aligned}$$

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r) \sim$$

$$((p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r \sim$$

$$(p \vee (\cancel{q \wedge \neg q}) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r \sim$$

$$(p \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee r \sim$$

$$(\cancel{(p \wedge \neg p)} \vee (p \wedge \neg q)) \vee r \sim$$

$$(p \wedge \neg q) \vee r \sim$$

$$\neg \neg (p \wedge \neg q) \vee r \sim$$

$$\neg (\neg p \vee q) \vee r \sim$$

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

2x11a

Kdaj KNO in DNO

Trditev

Vsak izjavni izraz ima DNO in

Vsak izjavni izraz ima KNO.

Kako dobimo DNO protislovja? Kako dobimo KNO tautologije?

Posledica

Za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B, ki vsebuje samo veznike $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Dožal.

Kaj je DNO protislovja?

$$(p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg q)$$

Kaj je KNO tautologije?

$$(p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q)$$

V ostale možnosti so zajete v receptih



Polni nabori izjavnih veznikov

Družina izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ je *poln nabor izjavnih veznikov*, če za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B , ki vsebuje samo veznike iz $\mathcal{N}$.

$\{\neg, \wedge, \vee\}$ je poln nabor izjavnih veznikov.

Polni nabori izjavnih veznikov

Nekaj drugih polnih naborov izjavnih veznikov:

$\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \Rightarrow\}$, $\{0, \Rightarrow\}$

1. 0 je "dopusten" izraz
2. Spremenljivke so "dopustni" izjavi izrazi
3. Če sta A in B "dop" izjavi izrazi, je tudi $(A \Rightarrow B)$ "dopusten" izjavi izraz.

Doker: $\{\neg, \vee\}$ je polni nabor.

Izberimo poljuben izjavi izraz A.

Ker je $\{\neg, \wedge, \vee\}$ polni nabor, obstaja izjavi izraz

A' , $A' \sim A$, in A' uporablja samo $\neg, \wedge, \vee$.

Kako li se v A' zveleli konjunkcij?

$$p \wedge q \sim \neg \neg (p \wedge q) \sim \neg (\neg p \vee \neg q) \quad \leftarrow$$

Če v A' nismo izmed $\wedge$ nadomestili tako, pridelamo izraz A'' , $A'' \sim A' \sim A$, ki uporablja samo $\neg$ in $\vee$. □

vsake izjavi izraz lahko
sistematično prepišemo kot
"dop" izjavi izraz.

Polni nabori izjavnih veznikov

Vprašanje:

Kako v praksi pokazati, da je nabor izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ poln?

1. Izberemo znan poln nabor izjavnih veznikov $\mathcal{Z}$.
2. Vsak veznik iz znanega nabora $\mathcal{Z}$ izrazimo samo z uporabo veznikov iz $\mathcal{N}$.

Dokaz.

① za $\{\neg, \wedge\}$ izberemo $\{\neg, \wedge, \vee\}$

$$p \vee q \sim \neg \neg (p \vee q) \sim \neg (\neg p \wedge \neg q) \quad \checkmark$$

② za $\{\neg, \Rightarrow\}$ izberemo $\{\neg, \vee\}$

$$p \vee q \sim \neg \neg p \vee q \sim \neg p \Rightarrow q \quad \checkmark$$

③ za $\{\Rightarrow, \circ\}$ izberemo $\{\Rightarrow, \neg\}$

$$\neg p \sim p \Rightarrow \circ \quad \checkmark$$

Polni nabori izjavnih veznikov

Vprašanje:

Kako v praksi pokazati, da nabor izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ ni poln?

Težko.

