Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

24. oktober 2023

Predikatni račun

Predpostavki:	*Vsi študentje računalništva znajo logično sklepati.*
	Škrat Kuzma ne zna logično sklepati.
Zaključek:	*Škrat Kuzma ni študent računalništva.*

$$\frac{\begin{array}{c}p\\ q\end{array}}{r}$$

področje pogovora — ljudje in pravljična bitja

$LS(x)$ — x zna logično sklepati.

$ŠR(x)$ — x je študent računalništva.

Področje pogovora in predikati

Področje pogovora je neprazna *množica* iz katere izbiramo *individualne konstante*.

Predikati so logične *funkcije*, ki za svoje argumente lahko dobijo individualne konstante iz področja pogovora.

Če v predikate vstavljamo (individualne) konstante, dobimo *izjave*.

$x + y = z$

$\equiv$

področje pogovora	$P(x)$	$D(x,y)$	$V(x,y,z)$
ljudje	x je plešast	x je ded od y	
števila	x je praštevilo	x deli y	z je vsota x in y
živalske vrste	x je ptič	x živi dlje kot y	

Spremenljivke in formule

V predikatnem računu bomo za spremenljivke uporabljali črke $x, y, z, \ldots$

V predikate lahko, namesto konstant, vstavljamo tudi spremeljivke. Na ta način pridelamo *formule*. Formule niso nujno izjave.

sin

$\sin x$

$x + 5 + y$

P

$P(x)$

$P(x)$

Kvantifikatorja

Poznamo dva kvantifikatorja:

$\forall$	univerzalni kvantifikator
$\exists$	eksistenčni kvantifikator

"for all"

"exists"

števil

$P(x)$ ... x je praštevilo

$P(2)$ .... 2 je praštevilo ✓

$P(4)$ .... 4 je praštevilo //

$P(5)$ .... 5 je praštevilo ✓

$\forall x P(x)$ ... za vsak x velja $P(x)$

... vsak x ima lastnost P

vsako število je praštevilo //

$\exists x P(x)$ ... obstaja x, za katerega je $P(x)$ res

obstaja x z lastnostjo P

obstaja praštevilo. ✓

formalizacija

Definiraj ustrezne predikate in zapiši naslednje izjave:

- *Nekateri politiki so nepošteni.*
- *Noben politik ni nepošten.*
- *Vsi politiki so nepošteni.*
- *Vsi politiki so pošteni.*

pp. ljudje

$P(x)$ .... x je politik

$N(x)$ .... x je nepošten

$\neg N(x)$ .... x je pošten

$$\exists x\,(P(x) \wedge N(x))$$

$$\neg \exists x\,(P(x) \wedge N(x))$$

$$\forall x\,(P(x) \Rightarrow N(x))$$

$$\forall x\,(P(x) \Rightarrow \neg N(x))$$

$$\forall x\,(P(x) \wedge N(x))$$

Vsi ljudje so nepošteni politiki.

Kako iz formule naredimo izjavo?

Možna sta dva pristopa.

1. Namesto spremenljivke vstavimo konstanto.
2. Formulo zapremo s kvantifikatorji.

$$P(x) \quad \cdots \quad P(\text{Gašper Fijavž})$$

$$P(x) \quad \cdots \quad \forall x\, P(x)$$

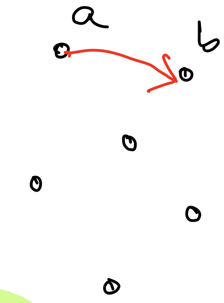
$$x + 5 = 17 \quad \cdots \quad 11 + 5 = 17$$

$$x + 5 = 17 \quad \cdots \quad \exists x\,(x + 5 = 17)$$

Zgled

Dvomestni predikat $P(x, y)$ naj pomeni x *pozna* y*-ona.*

pp: ljudje



Na katere načine lahko formulo $P(x, y)$ spremeniš v izjavo?

$P(\text{Ančka}, \text{Bonit})$ Ančka pozna Bonita.

$\exists y\, P(\text{Ančka}, y)$ Ančka nekoga pozna.

$\forall y\, P(\text{Ančka}, y)$ Ančka pozna vse ljudi.

$\exists x\, P(x, \text{Bonit})$ Bonita nekdo pozna.

$\forall x\, P(x, \text{Bonit})$ Bonita poznajo vsi.

$\exists x \exists y\, P(x,y)$ Nekdo nekoga pozna.

$\exists x \forall y\, P(x,y)$ Nekdo pozna vse ljudi.

$\forall x \exists y\, P(x,y)$ Vsakdo nekoga pozna.

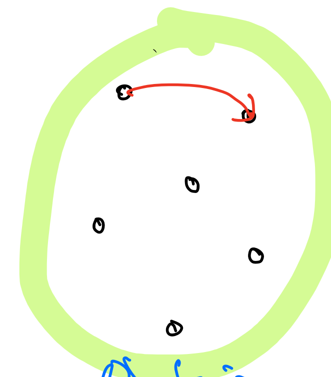
$\forall x \forall y\, P(x,y)$ Vsakdo pozna vse.

$\exists y \exists x\, P(x,y)$ Nekoga nekdo pozna.

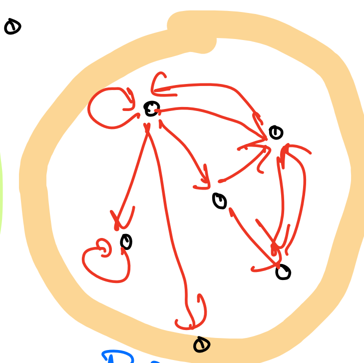
$\forall y \exists x\, P(x,y)$ Vsakega nekdo pozna.

$\exists y \forall x\, P(x,y)$ Nekoga poznajo vsi ljudje.

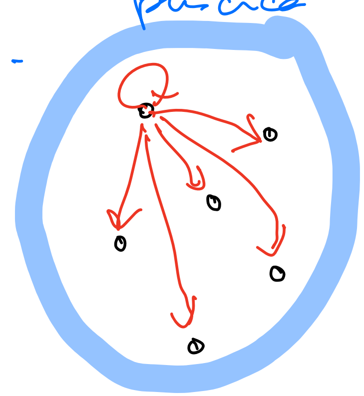
$\forall y \forall x\, P(x,y)$ Vsakega poznajo vsi.

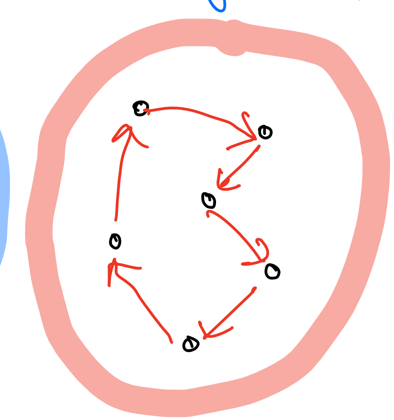


Obstaja rdeča puščica



Prisotne so vse puščice.





Izjavne formule

- *spremenljivke* $x, y, z, \ldots,$
- *konstante* $a, b, c, \ldots,$
- *predikati* $P, Q, R, \ldots,$
- izjavni vezniki $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots,$
- *kvantifikatorja* $\forall$ in $\exists$ ter
- oklepaja (in) .

Spremenljivkam in konstantam pravimo tudi *termi*.

Atomi predikatnega računa so, na primer,

$$P(x), P(a), Q(x,y), Q(a,x), \ldots$$

Atome dobimo tako, da terme vstavimo v predikate.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a = \frac{-bx - c}{x^2}$$

P sin

$P(x)$ sin x

$P(a)$ sin 1

$P(y)$ sin 60°

Izjavne formule

Izjavne formule so definirane induktivno:

1. Atomi so izjavne formule
2. Če sta W in V izjavni formuli in je x spremenljivka, potem so tudi

$$(\neg W), (W \wedge V), (W \vee V), (W \Rightarrow V), (W \Leftrightarrow V), \ldots$$

$$(\exists x\, W) \quad \text{in} \quad (\forall x\, W)$$

izjavne formule.

$$Q(x) \qquad P(y) \qquad P(a,z)$$

$$(\exists x\, Q(x)) \qquad (P(y) \wedge P(a,z))$$

$$((\exists x\, Q(x)) \Rightarrow (P(y) \wedge P(a,z)))$$

$$(\forall x((\exists x\, Q(x)) \Rightarrow (P(y) \wedge P(a,z))))$$

konstrukcijsko drevo

Doseg kvantifikatorjev

Doseg kvantifikatorja je *najmanjši možen*: najmanjša izjavna formula, ki jo preberemo desno od kvantifikatorja (skupaj z njegovo spremenljivko).

Kvantifikator *veže* svojo spremenljivko in proste spremenljivke z istim imenom v svojem dosegu.

Formulo brez prostih spremenljivk imenujemo, če imamo izbrano interpretacijo, *izjava*, ali *izjavna shema*, če interpretacija ni določena.

vezani prosta

$$\forall x\, P(x) \Rightarrow Q(x)$$

$$\forall x\, \neg P(x)$$

$$\neg \forall x\, P(x)$$

vezani prosta

$$\forall x\, P(x) \wedge Q(x)$$

prosta spremenljivka

$$x + 5$$

vezana sprem.

$$\int_1^2 x + 5 \, dx$$

$$3+5$$

$$\lim_{x \to 7} x + 5$$

Doseg, vezane in proste spremenljivke

Določi doseg kvantifikatorjev in odloči, katere spremenljivke so vezane in katere proste:

vezana vezani vezani prosta

$$\forall x \neg \exists x \forall z\, P(x, y, z)$$

vezani proste

$$\exists x\, \neg P(x, y) \Rightarrow Q(x) \wedge R(y)$$

vezani vezani proste spremenljivke

$$\exists x\, P(x) \Rightarrow \forall x\, Q(x) \vee P(x) \wedge R(x) \vee S(y)$$

Interpretacija izjavne formule

Interpretacija $\mathcal{I}$ izjavne formule W je sestavljena iz neprazne množice $\mathcal{D}$, ki ji pravimo *področje pogovora* interpretacije.
Poleg tega

- vsakemu predikatu ustreza 0/1 logična funkcija v $\mathcal{D}$ (0-mestnemu predikatu ustreza izjava oziroma njena logična vrednost)
- vsaki konstanti določimo vrednost v $\mathcal{D}$ (ponavadi je implicitno določena že z imenom konstante)
- vsaki prosti spremenljivki v W določimo vrednost v $\mathcal{D}$, pri tem vsem prostim spremenljivkam z istim imenom določimo *isto* vrednost iz $\mathcal{D}$.

vezana

$\forall x\, Q(x) \wedge P(y)$

$3+x$

1. področje pogovora
2. pomen predikatov
3. kaj so konstante
4. izbira prostih spremen

Pomen kvantifikatorjev

Naj bo W formula. Z $W(x/a)$ označimo formulo, ki jo dobimo tako, da v formuli W vse proste vstope spremenljivke x nadomestimo z a.

vezan

W	$P(x) \vee \exists x\, Q(x,y) \wedge R(b,x)$
$W(x/a)$	$P(a) \vee \exists x\, Q(x,y) \wedge R(b,a)$

1) v W poiščem proste xe

2) te proste xe nadomestim z a-jem

$W(x/b) \qquad P(b) \vee \exists x\, Q(x,y) \wedge R(b,b)$

$W(x/y) \qquad P(y) \vee \exists x\, Q(x,y) \wedge R(b,y)$

Pomen kvantifikatorjev

Formula $\forall x\, W$ je *resnična* v interpretaciji $\mathcal{I}$, če je za vsak element področja pogovora $d \in \mathcal{D}$ resnična formula $W(x/d)$. Sicer je $\forall x\, W$ neresnična.

Formula $\exists x\, W$ je *resnična* v interpretaciji $\mathcal{I}$, če v področju pogovora obstaja $d \in \mathcal{D}$, za katerega je formula $W(x/d)$ resnična. Sicer je $\exists x\, W$ neresnična.

Če v W ni prostih $x$ov, potem $W(x/d) = W$

$\forall x\, P(y)$

$P(y)(x/d) = P(y)$

$\forall x\, W$ je resnična v $\mathcal{I}$ ...

$W(x/d)$ je resnična za vse d iz področja pogovora.

$\exists x\, W$ je resnična v $\mathcal{I}$

$W(x/d)$ je resnična za vsaj en d iz p.p.

Enakovredne izjavne formule

Izjavni formuli W in V sta *enakovredni*, če imata isto logično vrednost v vseh možnih interpretacijah.

V tem primeru pišemo $W \sim V$.

Interpretacija formul W in V pomeni, da vse predikate, konstante in spremenljivke hkrati izbiramo iz istega področja pogovora. Tudi pomen predikatov v obeh formulah mora biti isti.

Koliko pa je interpretacij? Neskončno mnogo!

$$x+5 \neq y+5$$

$$2+x+3 = x+5$$

Enakovredne izjavne formule

Izjavna formula W je *splošno veljavna*, če je resnična v vsaki interpretaciji.

Izjavna formula V je *neizpolnljiva*, če je neresnična v vsaki interpretaciji.

Splošno veljavne in neizpolnljive izjavne formule so ustreznice tavtologije in protislovja v predikatnem računu.

$p \Rightarrow p$ tavtologija

$W \leftarrow$ denimo, da nima prostega xa $\forall x P(x) \Rightarrow \forall x P(x)$

$\forall x W \sim W$ splošno veljavna

izberimo poljubno interpretacijo I

$\forall x W$ je resnična v I ....

$W(x/d)$ je resnična za vsak d iz podr. pog.

W je resnična v I.

$p \wedge \neg p$ protislovje

$\exists y Q(y) \wedge \neg \exists y Q(y)$

neizpolnljiva

$p \Rightarrow q \sim \neg p \vee q$

$\forall x P(x) \Rightarrow \exists y Q(y) \sim \neg \forall x P(x) \vee \exists y Q(y)$

enakovredni formuli

Zgled

Formuli $\neg\forall x\, W$ in $\exists x\, \neg W$ sta enakovredni.

- Izberimo poljubno interpretacijo I, v kateri je $\neg\forall x W$ resnična.
- v I je $\forall x W$ lažna
- $W(x/d)$ ni resnična za vse d iz podr. pogovora
- v področju pogovora obstaja d, za katerega je $W(x/d)$ neresnična
- v področju pogovora obstaja d, za katerega je $\neg W(x/d)$ resnična.
- $\exists x \neg W$ je resnična v I.

+ obratna smer.

Zakoni predikatnega računa

So nekateri pomembni pari enakovrednih izjavnih formul:

de Morganova zakona.

$$\neg\forall x\, W \sim \exists x\, \neg W$$
$$\neg\exists x\, W \sim \forall x\, \neg W$$

zamenjava istovrstnih kvantifikatorjev

$$\forall x \forall y\, W \sim \forall y \forall x\, W$$
$$\exists x \exists y\, W \sim \exists y \exists x\, W$$

distributivnost $\forall$ preko $\wedge$ in $\exists$ preko $\vee$

$$\forall x\, (W \wedge V) \sim \forall x\, W \wedge \forall x\, V$$
$$\exists x\, (W \vee V) \sim \exists x\, W \vee \exists x\, V$$

$\neg\forall x\, P(x)$ ljudje plesanost

Niso vsi ljudje plesalci

$\exists x\, \neg P(x)$

Obstaja po glavi kosmat človek.

$$\exists x\, (W \wedge V) \overset{?}{\sim} \exists x\, W \wedge \exists x\, V$$

$$\exists x\, (S(x) \wedge L(x)) \not\sim \exists x\, S(x) \wedge \exists x\, L(x)$$

$\lightning$

PP $\mathbb{N}$

$S(x)$ ... x je sodo.

$L(x)$ ... x je liho.

Preimenovanje spremenljivk

Formula

$$\forall x\,(P(w) \Rightarrow P(x))$$

je enakovredna formuli

$$\forall y\,(P(w) \Rightarrow P(y))$$

Preimenovanje spremenljivk

Trditev

Če se y ne pojavi v W, potem veljata enakovrednosti:

$$\forall x\, W \quad \sim \quad \forall y\, (W(x/y))$$

$$\exists x\, W \quad \sim \quad \exists y\, (W(x/y))$$

Preimenovanje spremenljivk

Zakoni predikatnega računa z omejitvami

Če se x ne pojavi v formuli C, potem veljajo naslednje enakovrednosti:

$$\forall x\,(C \vee W) \sim C \vee \forall x\, W$$
$$\exists x\,(C \vee W) \sim C \vee \exists x\, W$$

$$\forall x\,(C \wedge W) \sim C \wedge \forall x\, W$$
$$\exists x\,(C \wedge W) \sim C \wedge \exists x\, W$$