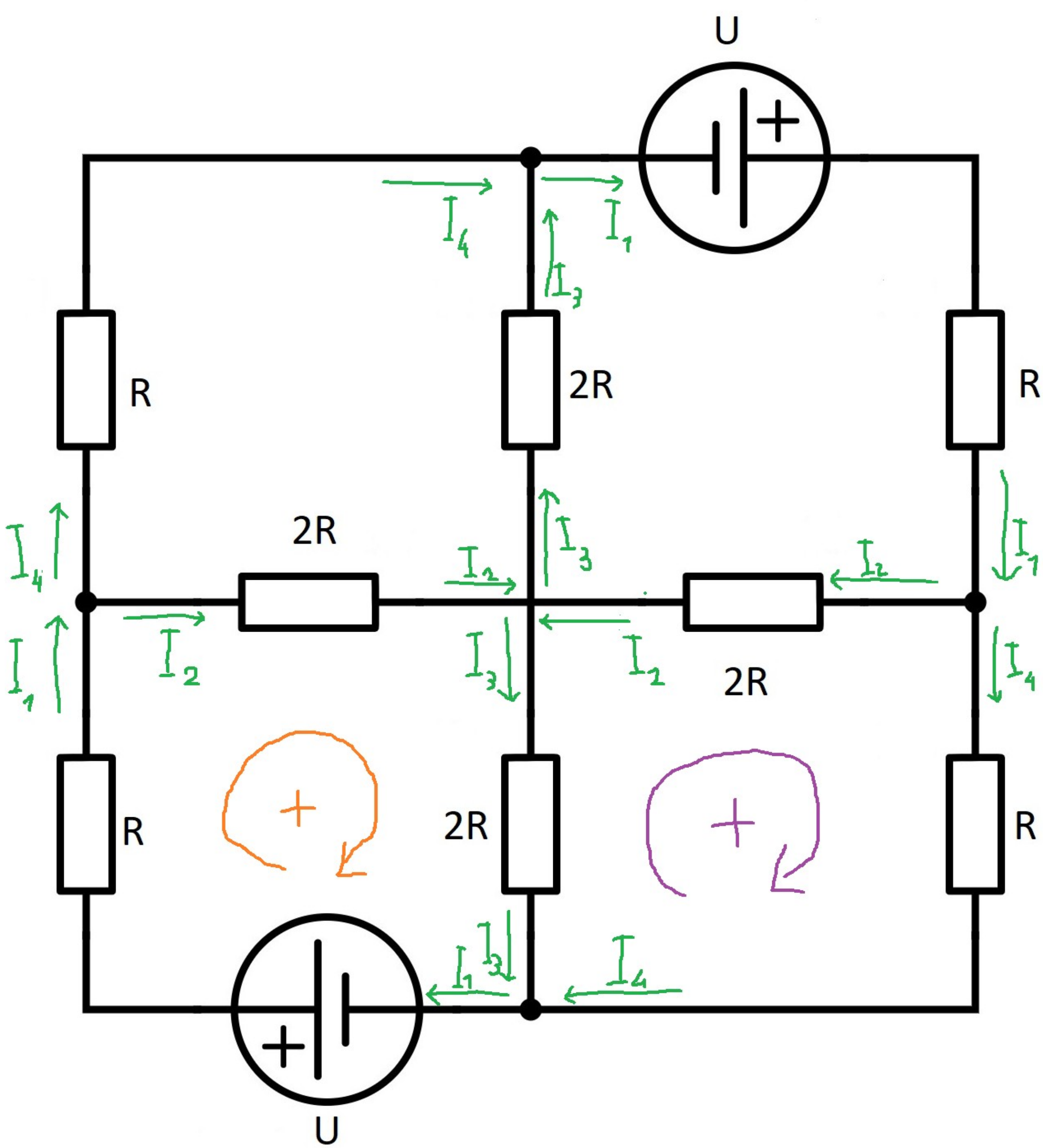
Tutorstvo - fizika, FRI

11. teden: električna vezja

1. Kirchoffova zakona

Izračunaj tok, ki teče skozi bateriji v spodnjem vezju (na skici označen z I_1), kjer je gonilna napetost $U = 9$ V in $R = 10\,\Omega$.



Rešitev:

Nalogo bomo rešili s pomočjo Kirchoffovih zakonov. Preden pa se lotimo naloge, si poglejmo, kakšna je simetrija našega problema. Vidimo, da če naše vezje zavrtimo okrog središča za 180 stopinj, dobimo isto vezje. S tem si lahko nalogo poenostavimo, tako da delamo samo s štirimi tokovi namesto osmimi, pri čemer pa moramo upoštevati ustrezno simetrijo problema (glej skico). Simetrija je edini pogoj, ki ga moramo upoštevati, sicer si lahko smeri tokov izberemo poljubno. O napačni izbiri smeri nas bo obvestil negativni rezultat za tisti tok.

Začnimo s prvim Kirchoffovim zakonom, ki pravi, da je v vsakem vozlišču vsota vseh prihajajočih tokov enaka vsoti vseh odhajajočih tokov. Zapišimo ga najprej za vozlišče, ki je najbližje bateriji.

$$I_3 + I_4 = I_1 \tag{1}$$

V vozlišču na sredini dobimo

$$I_2 = I_3. \tag{2}$$

Sedaj uporabimo še drugi Kirchoffov zakon, ki pravi, da je vsota vseh napetosti v zaključeni zanki enaka 0. Pri uporabi tega zakona si pomagamo z naslednjimi pravili:

- Izberemo si zanko, za katero želimo zapisati drugi Kirchoffov zakon, in določimo pozitivno smer.
- Če gremo v pozitivni smeri skozi upornik v smeri toka, napetost pade za IR. Če gremo skozi upornik v nasprotni smeri toka, napetost naraste za IR.
- Če gremo v pozitivni smeri skozi baterijo in prehajamo iz $-$ v $+$, napetost naraste za gonilno napetost baterije. V nasprotnem primeru napetost pade.

Zapišimo sedaj drugi Kirchoffov zakon za oranžno zanko:

$$U - I_1R - 2I_2R - 2I_3R = 0 \tag{3}$$

Za vijolično zanko se Kirchoffov zakon glasi:

$$2I_3R + 2I_2R - I_4R = 0 \tag{4}$$

Enačbe (1), (2), (3) in (4) nam tvorijo sistem štirih enačb s štirimi neznankami, ki ga znamo rešiti. Najprej porabimo enačbo (2), tako da vsepovsod nadomestimo I_2 z I_3. Iz enačbe (1) nato izrazimo $I_4 = I_1 - I_3$ in ga vstavimo v enačbo (4), ki sedaj skupaj z enačbo (3) tvori sistem dveh enačb z neznankama I_1 in I_3.

$$\frac{U}{R} - I_1 - 4I_3 = 0$$

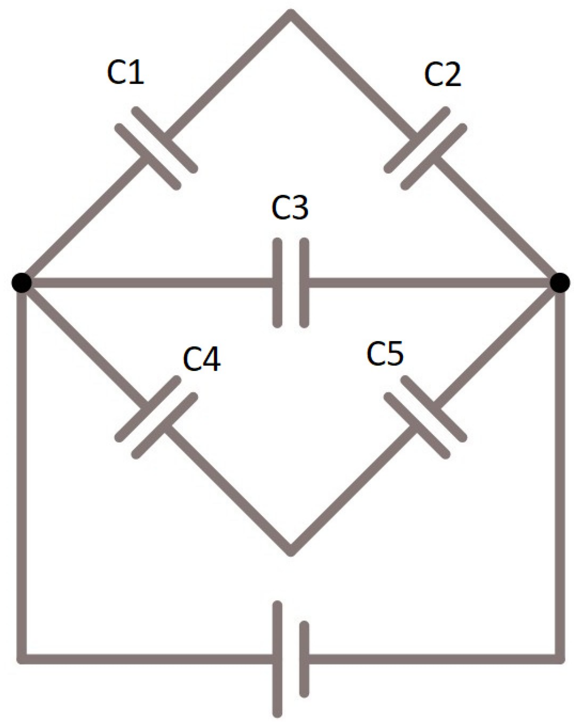
$$5I_3 - I_1 = 0$$

Obe enačbi smo delili z R. Iz spodnje enačbe sedaj izrazimo $I_3 = I_1/5$ in ga vstavimo v zgornjo enačbo. Dobimo linearno enačbo za I_1.

$$\frac{U}{R} - I_1 - \frac{4}{5}I_1 = 0 \rightarrow I_1 = \frac{5U}{9R} = 0.5 \text{ A}$$

2. Nadomestna kapacitivnost

Izračunaj nadomestno kapacitivnost za dano vezje. Kapacititivnost kondenzatorja z indeksom i je enaka $C_i = i\,\mu$F.



Rešitev:

Uporabili bomo pravila za seštevanje kapacitivnosti pri vzporedni in zaporedni vezavi. Pri vzporedni vezavi se kapacitivnosti seštevajo kot

$$C = C_1 + C_2 + \cdots$$

pri zaporedni vezavi pa

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots$$

Kondenzatorja C_1 in C_2 sta vezana zaporedno, tako da bo njuno nadomestno kapacitivnost izračunamo kot

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \to C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

Prav tako lahko izračunamo nadomestno kapacitivnost kondenzatorjev C_4 in C_5.

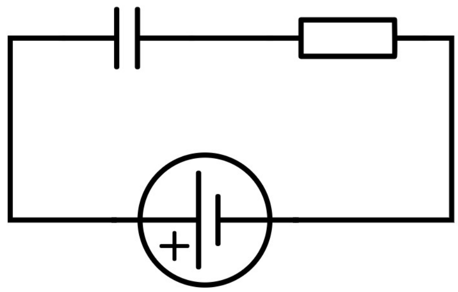
$$C_{45} = \frac{C_4 C_5}{C_4 + C_5}$$

Ostanejo nam trije vzporedno vezani kondenzatorji, in sicer C_{12}, C_3 in C_{45}. Njihov nadomestno kapacitivnost dobimo tako, da seštejemo posamezne kapacitivnosti.

$$C = C_{12} + C_3 + C_{45} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} + C_3 + \frac{C_4 C_5}{C_4 + C_5} = 5.89\,\mu\text{F}$$

3. Polnjenje kondenzatorja.

Imejmo sedaj kondenzator z izračunano kapacitivnostjo C iz druge naloge, ki ga vežemo zaporedno z upornikom z upornostjo $R = 200\,\Omega$. Priključimo ju na vir napetosti U_0. Po kolikšnem času sta napetosti na uporniku in kondenzatorju enaki?



Ker je vezava zaporedna, teče skozi upornik enak tok I. Zapišimo drugi Kirchoffov zakon za vezje:

$$U_0 + U_C + U_R = 0$$

Upoštevamo, da je napetost na kondenzatorju U_C enaka e/C, kjer je e naboj na kondenzatorju, napetost na uporniku U_R pa je enaka IR.

$$U_0 + \frac{e}{C} + IR = 0$$

Enačbo odvajamo po času in dobimo:

$$\frac{1}{C}\frac{de}{dt} + R\frac{dI}{dt} = 0$$

Upoštevamo, da je tok enak časovnemu odvodu naboja

$$I = \frac{de}{dt}$$

in dobimo diferencialno enačbo za tok.

$$\frac{1}{C}I + R\frac{dI}{dt} = 0 \rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{I}{RC}$$

Enačbo lahko rešimo s pomočjo separacije spremenljivk.

$$\int_{I_0}^{I}\frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC}\int_0^t dt \rightarrow \ln\frac{I}{I_0} = -\frac{t}{RC} \rightarrow I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Pri tem smo konstanto RC označili s τ, ki mu rečemo karakteristični čas. Pove nam, po kolikšnem času se tok zmanjša za faktor e (e tukaj ni naboj, ampak Eulerjevo število). Določiti moramo še I_0. to storimo tako, da upoštevamo, da ob času $t = 0$ na kondenzatorju še ni naboja, torej teče takrat tok samo skozi upornik. Velja torej $I(t = 0) = I_0 = U_0/R$.

Sedaj moramo le še določiti časovno odvisnost napetosti na kondenzatorju in uporniku. Napetost na uporniku U_R je kar enaka $-IR$:

$$U_R = -U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Napetost na kondenzatorju pa lahko dobimo iz drugega Kirchoffovega zakona.

$$U_C = -U_0 - U_R = -U_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

Napetosti enačimo in dobimo

$$e^{-\frac{t}{\tau}} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \rightarrow e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{1}{2} \rightarrow t = \tau \ln 2 = 0.817 \text{ ms}$$