

Diskretne strukture

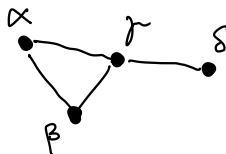
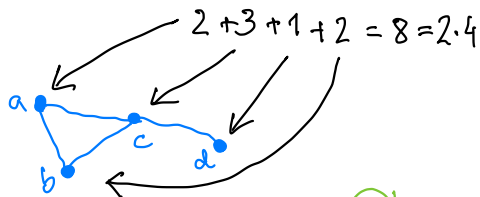
Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

30. december 2025

Od zadnjič

- Grafi, osnove.
- Stopnje točk.
- Izomorfizem grafov.



a	alpha
b	beta
c	gamma
d	delta

Današnji program

Osnovne družine grafov

Operacije z grafi

Podgrafi

Sprehodi v grafih, povezanost

Polni grafi

Graf je *poln*, če sta vsaki njegovi točki sosed. Poln graf na n točkah označimo s K_n .

$$V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

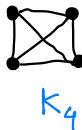
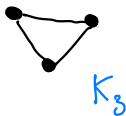
$$E(K_n) = \{v_i v_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

$$\deg(v_1) = n - 1$$

$$|V(K_n)| = n$$

$$|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

K_n je $(n - 1)$ -regularen graf.



Prazni grafi

Graf je **prazen**, če nobeni njegovi točki nista sosed. Prazen graf na n točkah označimo s $\overline{K_n}$.

$$V(\overline{K_n}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E(\overline{K_n}) = \emptyset$$

$$\deg(v_1) = 0$$

$$|V(\overline{K_n})| = n$$

$$|E(\overline{K_n})| = 0$$

$\overline{K_n}$ je 0-regularen graf.

$$\overline{K_1} = K_1$$



Polni dvodelni grafi

$K_{m,n}$ je *polni dvodelni graf* na $n + m$ točkah. Vsebuje dva *barvna razreda* s po n in m točkami, točki sta sosedi natanko tedaj, ko sta v različnih barvnih razredih.

$$\begin{aligned} V(K_{m,n}) &= \{v_1, v_2, \dots, v_m, u_1, u_2, \dots, u_n\} \\ E(K_{m,n}) &= \{v_i u_j ; 1 \leq i \leq m \text{ in } 1 \leq j \leq n\} \\ \deg(v_1) &= n, \deg(u_1) = m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |V(K_{m,n})| &= m + n \\ |E(K_{m,n})| &= m \cdot n \\ K_{n,n} &\text{ je } n\text{-regularen.} \end{aligned}$$

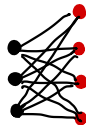
$$K_{1,1} = K_2$$



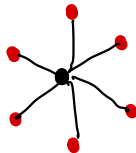
$K_{1,1}$



$K_{3,3}$



$K_{3,4}$



$K_{1,6}$

zveza

Cikli

Cikel na $n \geq 3$ točkah označimo s C_n .

$$V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E(C_n) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n, v_n v_1\}$$

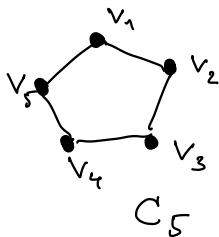
$$\deg(v_1) = 2$$

$$|V(C_n)| = n$$

$$|E(C_n)| = n$$

C_n je 2-regularen graf.

$$C_3 = K_3, C_4 = K_{2,2}$$



Poti

Pot na n točkah označimo s P_n .

$$V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E(P_n) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n\}$$

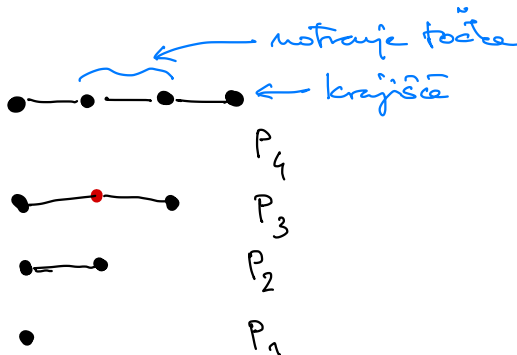
$$\deg(v_1) = 1, \deg(v_2) = 2$$

$$|V(P_n)| = n$$

$$|E(P_n)| = n - 1$$

$$\text{če } n \geq 3.$$

$$P_1 = K_1 = \overline{K_1}, P_2 = K_2 = K_{1,1}, P_3 = K_{2,1}$$



Hiperkocke

Točke *d*-razsežne hiperkocke Q_d so zaporedja ničel in enic dolžine d . Dve takšni točki-zaporedji sta sosedji, če se razlikujeta v natanko enem členu.

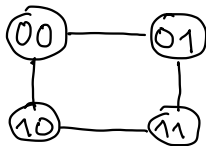
$$|V(Q_d)| = 2^d$$

$$|E(Q_d)| = d \cdot 2^{d-1}$$

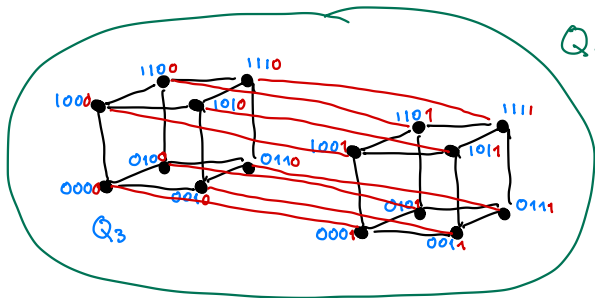
Q_d je d -regularen graf.

$$Q_0 = K_1, Q_1 = K_2, Q_2 = C_4$$

Q_2



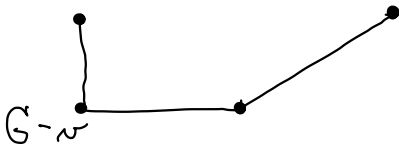
Q_4



Operacije z grafi

Poznamo naslednje elementarne operacije z grafi:

- ▶ *odstranjevanje povezave:* $G \mapsto G - e$
- ▶ *dodajanje povezave:* $G \mapsto G + f$
- ▶ *odstranjevanje točke:* $G \mapsto G - v$



Podgrafi

Pravimo, da je H *podgraf* grafa G , $H \subseteq G$, če je $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$.

Podgraf dobimo tako, da iz originalnega grafa odstranjujemo točke in/ali povezave.

Podgraf H grafa G je *vpjet podgraf*, če je $V(H) = V(G)$.

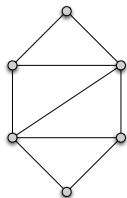
Odstranjujemo samo povezave, točke pustimo.

Podgraf H grafa G je *induciran podgraf*, če za vsako povezavo $e = uv \in E(G)$ velja: če sta u in v točki grafa H , potem je tudi e povezava v grafu H .

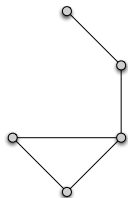
Induciran podgraf lahko dobimo tako, da iz originalnega grafa odstanjujemo samo točke — skupaj s povezavami, ki se jih dotikajo.

Oznake: $G[U]$ *induciran*, $G[F]$ *vpjet*, pri $U \subseteq V(G)$ in $F \subseteq E(G)$.

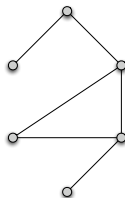
Zgledi podgrafov



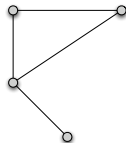
Graf G .



$H_1 \subseteq G$



$H_2 \subseteq G$,
vpet.



$H_3 \subseteq G$,
induciran.

Sprehodi v grafih

Sprehod S v grafu $G = (V, E)$ je zaporedje točk

$$u_0 u_1 u_2 \dots u_{n-1} u_n,$$

pri čemer sta zaporedni točki sprehoda u_i in u_{i+1} **sosedi** v grafu G ($i = 0, \dots, n-1$).

Dolžina sprehoda $S = u_0 u_1 \dots u_n$ je enaka n , $|S| = n$.

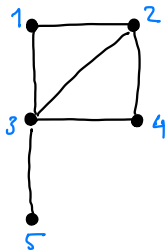
Točko u_0 imenujemo **začetek**, točko u_n pa **konec** sprehoda.

$u - v$ sprehod je sprehod z začetkom v u in koncem v v .

Sprehod $S = u_0 \dots u_n$ je **pot**, če $u_i \neq u_j$ za vse $0 \leq i < j \leq n$.

Sprehod $S = u_0 \dots u_n$ je **obhod**, če je $u_0 = u_n$.

Sprehod $S = u_0 \dots u_n$ je **cikel**, če je $u_0 = u_n$, sicer pa so točke med sabo različne in je $n \geq 3$.



1 2 3 5 3 4

2 3 4 2 1

5 3 4 2 3

1 3 4

1 2 3 5

1 2 3 4 2 1

3 4 3

3 4 2 3 4 2 3

4

2 3 4 2

3 4 2 1 3

Sprehodi, operacije

Za sprehoda

$$S = u_0 u_1 u_2 \dots u_{k-1} u_k$$

in

$$Z = u_k u_{k+1} u_{k+2} \dots u_{\ell-1} u_{\ell}$$

je

- ▶ $S^R = u_k u_{k-1} \dots u_1 u_0$
obratni sprehod k S ,
- ▶ $SZ = u_0 u_1 \dots u_{k-1} u_k u_{k+1} \dots u_{\ell-1} u_{\ell}$
stik sprehodov S in Z in
- ▶ $S_{u_i u_j} = u_i u_{i+1} \dots u_{j-1} u_j$, kjer i, j zadoščata $0 \leq i \leq j \leq k$
odsek sprehoda S .

~~$u_1 u_2$~~ $u_3 u_4 u_5 u_6 u_7$ ~~$u_8 u_9$~~

Sprehod ali pot, povezanost

Lema

Če v grafu $G = (V, E)$ obstaja $u - v$ sprehod S , potem v G obstaja tudi $u - v$ pot.

Posledica (dokaza zgornje leme)

Najkrajši $u - v$ sprehod v grafu je pot.

Graf G je **povezan**, če za vsaki dve točki $u, v \in V(G)$ v grafu G obstaja $u - v$ sprehod (ekvivalentno pot).

Dokaz. Naj bo S_0 najkrajši $u - v$ sprehod v G . Trdim, da je S_0 pot.

Domimo, da S_0 ni pot. $S_0 = u \text{ --- } x \text{ --- } y \text{ --- } x \text{ --- } z \text{ --- } v$

$S'_0 = u \text{ --- } x \text{ --- } z \text{ --- } v$

S'_0 je stogo krajši od S_0 . $\rightarrow \times$



Povezane komponente

V množici točk grafa G definirajmo relacijo P z naslednjim predpisom:

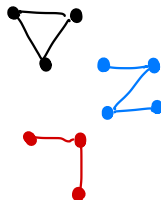
$$uPv \iff v \text{ v } G \text{ obstaja } u - v \text{ sprehod.}$$

Pokaži, da je P ekvivalenčna relacija.

Naj bo G graf, in $V_1, V_2, \dots, V_k$ ekvivalenčni razredi relacije P :

$$V(G)/P = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$$

Grafom $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$ pravimo *povezane komponente* grafa G .



Zakaj je P ekvivalenčna?

- P refleksivna $\leftarrow$ sprehodi dolžine 0
- P simetrična $\leftarrow$ obratni sprehodi
- P transitivna $\leftarrow$ stih sprehod

Razdalja v povezanem grafu

Naj bo G povezan graf. **Razdalja** med točkama u in v v grafu G , $\text{dist}(u, v)$, je dolžina najkrajše $u - v$ poti (sprehoda) v G .

Trditev

Razdalja dist v povezanem grafu ustreza **trikotniški neenakosti**, za poljubne tri točke u, v, w grafa G velja

$$\text{dist}(u, w) \leq \text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w)$$

Dokaz

P_{uv} najkrajša $u-v$ pot

$$|P_{uv}| = \text{dist}(u, v)$$

P_{vw} najkrajša $v-w$ pot

$$|P_{vw}| = \text{dist}(v, w)$$

$P_{uv} P_{vw}$ je $u-w$ sprehod

$$\text{dist}(u, w) \leq |P_{uv} P_{vw}| = |P_{uv}| + |P_{vw}| = \text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w)$$

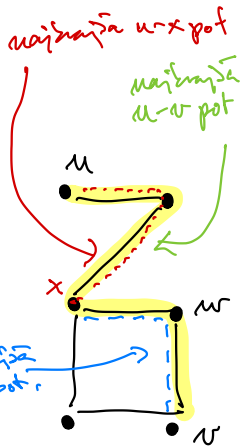


$$a \geq b \geq c$$

$$a \leq b + c$$

$$b \leq a + c$$

$$c \leq a + b$$



$$\left| \begin{array}{l} \text{dist}(u, v) = 4 \\ \text{dist}(u, w) = 3 \end{array} \right.$$