

Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

30. december 2025

Od zadnjič

- ▶ Grafi, osnove.
- ▶ Stopnje točk.
- ▶ Izomorfizem grafov.

Današnji program

Osnovne družine grafov

Operacije z grafi

Podgrafi

Sprehodi v grafih, povezanost

Polni grafi

Graf je *poln*, če sta vsaki njegovi točki sosedi. Poln graf na n točkah označimo s K_n .

$$V(K_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E(K_n) = \{v_i v_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

$$\deg(v_1) = n - 1$$

$$|V(K_n)| = n$$

$$|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$$

K_n je $(n - 1)$ -regularen graf.

Prazni grafi

Graf je *prazen*, če nobeni njegovi točki nista sosedi. Prazen graf na n točkah označimo s $\overline{K_n}$.

$$V(\overline{K_n}) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E(\overline{K_n}) = \emptyset$$

$$\deg(v_1) = 0$$

$$|V(\overline{K_n})| = n$$

$$|E(\overline{K_n})| = 0$$

$\overline{K_n}$ je 0-regularen graf.

$$\overline{K_1} = K_1$$

Polni dvodelni grafi

$K_{m,n}$ je *polni dvodelni graf* na $n + m$ točkah. Vsebuje dva *barvna razreda* s po n in m točkami, točki sta sosedi natanko tedaj, ko sta v različnih barvnih razredih.

$$\begin{aligned}V(K_{m,n}) &= \{v_1, v_2, \dots, v_m, u_1, u_2, \dots, u_n\} \\E(K_{m,n}) &= \{v_i u_j ; 1 \leq i \leq m \text{ in } 1 \leq j \leq n\} \\ \deg(v_1) &= n, \deg(u_1) = m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|V(K_{m,n})| &= m + n \\|E(K_{m,n})| &= m \cdot n \\K_{n,n} &\text{ je } n\text{-regularen.}\end{aligned}$$

$$K_{1,1} = K_2$$

Cikli

Cikel na $n \geq 3$ točkah označimo s C_n .

$$V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E(C_n) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n, v_n v_1\}$$

$$\deg(v_1) = 2$$

$$|V(C_n)| = n$$

$$|E(C_n)| = n$$

C_n je 2-regularen graf.

$$C_3 = K_3, C_4 = K_{2,2}$$

Poti

Pot na n točkah označimo s P_n .

$$V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

$$E(P_n) = \{v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n\}$$

$$\deg(v_1) = 1, \deg(v_2) = 2$$

$$|V(P_n)| = n$$

$$|E(P_n)| = n - 1$$

$$\text{če } n \geq 3.$$

$$P_1 = K_1 = \overline{K_1}, P_2 = K_2 = K_{1,1}, P_3 = K_{2,1}$$

Hiperkocke

Točke *d-razsežne hiperkocke* Q_d so zaporedja ničel in enic dolžine d . Dve takšni točki-zaporedji sta sosedji, če se razlikujeta v natanko enem členu.

$$|V(Q_d)| = 2^d$$

$$|E(Q_d)| = d \cdot 2^{d-1}$$

Q_d je d -regularen graf.

$$Q_0 = K_1, Q_1 = K_2, Q_2 = C_4$$

Operacije z grafi

Poznamo naslednje elementarne operacije z grafi:

- ▶ *odstranjevanje povezave*: $G \mapsto G - e$
- ▶ *dodajanje povezave*: $G \mapsto G + f$
- ▶ *odstranjevanje točke*: $G \mapsto G - v$

Podgrafi

Pravimo, da je H *podgraf* grafa G , $H \subseteq G$, če je $V(H) \subseteq V(G)$ in $E(H) \subseteq E(G)$.

Podgraf dobimo tako, da iz originalnega grafa odstranjujemo točke in/ali povezave.

Podgraf H grafa G je *vpjet podgraf*, če je $V(H) = V(G)$.

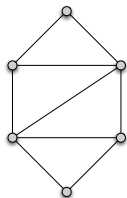
Odstranjujemo samo povezave, točke pustimo.

Podgraf H grafa G je *induciran podgraf*, če za vsako povezavo $e = uv \in E(G)$ velja: če sta u in v točki grafa H , potem je tudi e povezava v grafu H .

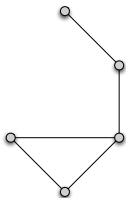
Induciran podgraf lahko dobimo tako, da iz originalnega grafa odstanjujemo samo točke — skupaj s povezavami, ki se jih dotikajo.

Oznake: $G[U]$ *induciran*, $G[F]$ *vpjet*, pri $U \subseteq V(G)$ in $F \subseteq E(G)$.

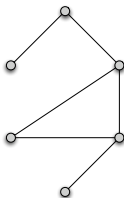
Zgledi podgrafov



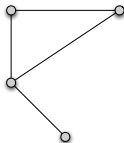
Graf G .



$H_1 \subseteq G$



$H_2 \subseteq G$,
vpet.



$H_3 \subseteq G$,
induciran.

Sprehodi v grafih

Sprehod S v grafu $G = (V, E)$ je zaporedje točk

$$u_0 u_1 u_2 \dots u_{n-1} u_n,$$

pri čemer sta zaporedni točki sprehoda u_i in u_{i+1} **sosedi** v grafu G ($i = 0, \dots, n-1$).

Dolžina sprehoda $S = u_0 u_1 \dots u_n$ je enaka n , $|S| = n$.

Točko u_0 imenujemo *začetek*, točko u_n pa *konec* sprehoda.

$u - v$ sprehod je sprehod z začetkom v u in koncem v v .

Sprehod $S = u_0 \dots u_n$ je *pot*, če $u_i \neq u_j$ za vse $0 \leq i < j \leq n$.

Sprehod $S = u_0 \dots u_n$ je *obhod*, če je $u_0 = u_n$.

Sprehod $S = u_0 \dots u_n$ je *cikel*, če je $u_0 = u_n$, sicer pa so točke med sabo različne in je $n \geq 3$.

Sprehodi, operacije

Za sprehoda

$$S = u_0 u_1 u_2 \dots u_{k-1} u_k$$

in

$$Z = u_k u_{k+1} u_{k+2} \dots u_{\ell-1} u_{\ell}$$

je

- ▶ $S^R = u_k u_{k-1} \dots u_1 u_0$
obratni sprehod k S ,
- ▶ $SZ = u_0 u_1 \dots u_{k-1} u_k u_{k+1} \dots u_{\ell-1} u_{\ell}$
stik sprehodov S in Z in
- ▶ $S_{u_i u_j} = u_i u_{i+1} \dots u_{j-1} u_j$, kjer i, j zadoščata $0 \leq i \leq j \leq k$
odsek sprehoda S .

Sprehod ali pot, povezanost

Lema

Če v grafu $G = (V, E)$ obstaja $u - v$ sprehod S , potem v G obstaja tudi $u - v$ pot.

Posledica (dokaza zgornje leme)

Najkrajši $u - v$ sprehod v grafu je pot.

Graf G je **povezan**, če za vsaki dve točki $u, v \in V(G)$ v grafu G obstaja $u - v$ sprehod (ekvivalentno pot).

Povezane komponente

V množici točk grafa G definirajmo relacijo P z naslednjim predpisom:

$$uPv \iff \text{v } G \text{ obstaja } u - v \text{ sprehod.}$$

Pokaži, da je P ekvivalenčna relacija.

Naj bo G graf, in $V_1, V_2, \dots, V_k$ ekvivalenčni razredi relacije P :

$$V(G)/P = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$$

Grafom $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$ pravimo *povezane komponente* grafa G .

Razdalja v povezanem grafu

Naj bo G povezan graf. *Razdalja* med točkama u in v v grafu G , $\text{dist}(u, v)$, je dolžina najkrajše $u - v$ poti (sprehoda) v G .

Trditev

Razdalja dist v povezanem grafu ustreza trikotniški neenakosti, za poljubne tri točke u, v, w grafa G velja

$$\text{dist}(u, w) \leq \text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, w)$$