Izpit iz Matematičnega modeliranja

4. julij 2013

1. Podana je matrika $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -11 \\ 3 & 2 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$.

   (a) Določite vsaj en posplošen inverz matrike A

   (b) Prepričajte se, da je sistem
   $$A\,x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
   rešljiv in s pomočjo točke (a) določite vse rešitve tega sistema.

   Rešitev:

   (a) Opazimo, da je rang matrike A enak 2, zato lahko za 2×2 matriko M izberemo denimo $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, katere inverz je $M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. Torej je eden izmed posplošenih inverzov matrike A enak $G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (b) Da je sistem rešljiv, se lahko preprosto prepičamo tako, da izračunamo, da sta tako rang matrike A kot rang matrike $[A \mid b]$, kjer je $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, oba enaka 2. Sedaj vemo, da so vse rešitve sistema enačb $A\,x = b$ oblike $Gb + (GA - I)z$, kjer je $z \in \mathbb{R}^4$ poljuben vektor. Torej so vse rešitve oblike
   $$\begin{bmatrix} -z_3 - 29z_4 - 1 \\ 2z_3 + 47z_4 + 2 \\ -z_3 \\ -z_4 \end{bmatrix}.$$

   (Če ste izbrali drugi posplošen inverz G v (a) delu, ste tu dobili drugačno parametrizacijo rešitev.)

2. V izposoji imamo zelo star računalnik, ki vsak dan bodisi deluje bodisi ne deluje. Če danes deluje, potem bo tudi jutri deloval z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. Če danes ne deluje, potem bo jutri deloval z verjetnostjo $\frac{1}{2}$. Če računalnik ne deluje dva dni zapored, nam ga tretji dan zamenjajo z novim delujočim računalnikom z istimi verjetnostmi, da se nam naslednji dan pokvari.

(a) Zapišite matriko prehodov stanj markovske verige, ki je določena z delovanjem računalnika. Pri tem naj bodo možna stanja 1 (računalnik deluje), 0_1 (računalnik ne deluje, a je še včeraj deloval) ter 0_2 (računalnik ne deluje že drugi dan zapovrstjo).

(b) Pokažite, da obstaja limitno stanje markovske verige, določeno z delovanjem računalnika.

(c) Koliko je verjetnost, da imamo pri sebi po zelo (zelo, zelo) veliko dneh delujoči računalnik?

Rešitev:

(a) Matrika prehoda stanj v urejenih stanjih 1, 0_1 *in* 0_2 *je enaka* $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) Ker je markovska veriga nerazcepna, obstaja limitno stanje natanko tedaj, ko je 1 edina lastna vrednost matrike P*, ki je po absolutni vrednosti enaka 1. Karakteristični polinom matrike* P *je enak* $-\lambda^3 + \frac{1}{2}\lambda^2 + \frac{1}{4}\lambda + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}(\lambda - 1)(4\lambda^2 + 2\lambda + 1)$*, katerega ničle so enake* $1, -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{3}}{4}$*, zato je 1 res edina lastna vrednost, ki je po absolutni vrednosti enaka 1.*

(c) Limitno stanje markovske verige je določeno z lastnim vektorjem matrike P^{T}*, ki pripada lastni vrednosti 1, in ki ima vsoto komponent enako 1. Ta je enak* $\begin{bmatrix} \frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}$*, torej bomo imeli po zelo (zelo, zelo) veliko dneh pred seboj delujoči računalnik z verjetnostjo* $\frac{4}{7}$*.*

3. Oglejmo si vijačnico $\mathbf{r}(t) = (3\cos(2t), 2t, 3\sin(2t))$.

(a) Zapišite tangento na vijačnico v točki $(3, 0, 0)$.

(b) Ali je v kakšni točki na vijačnici tangenta v tej točki vzporedna vektorju $(0, 1, 0)^{\mathsf{T}}$? Kaj pa vektorju $(0, 1, -3)^{\mathsf{T}}$?

(c) Izračunajte dolžino loka vijačnice od točke $(3, 0, 0)$ do $(3, 2\pi, 0)$.

4. Iščemo rešitev začetnega problema

$$x'' + 5x' + 4x = 0; \quad x(0) = 3 \quad \text{in} \quad x'(0) = -5.$$

(a) Poiščite točno rešitev tega začetnega problema.

(b) Homogeno diferencialno enačbo $x'' + 5x' + 4x = 0$ zapišite kot sistem diferencialnih enačb prvega reda. Zapišite tudi ustrezne začetne pogoje.

(c) Izračunaj rešitev z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.2$ na intervalu $[0, 0.4]$.

(d) **Dodatek za 25 točk:** Narišite fazno sliko, lastne smeri sistema in rešitev, ki zadošča zgornjim začetnim pogojem.