2. izpit iz Matematičnega modeliranja

1.7. 2014

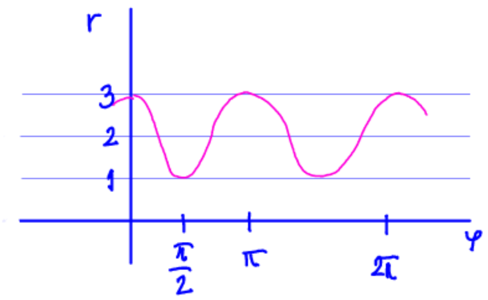
1. Krivulja v polarnih koordinatah je podana s predpisom

$$r(\varphi) = 2 + \cos(2\varphi).$$

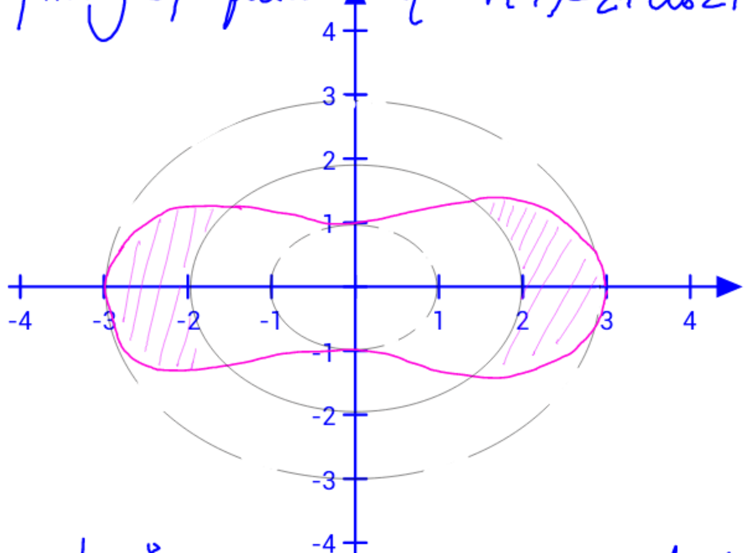
   (a) Skicirajte krivuljo.

   (b) Izračunajte ploščino območja, ki leži znotraj krivulje in izven kroga s središčem v koordinatnem izhodišču in polmerom 2.

a) Funkcija r (oddaljenosti od izhodišča) se spreminja v odvisnosti od kota φ kot je prikazano na grafu:



Zato je krivulja, podana z $r(\varphi)=2+\cos 2\varphi$ enaka:



b) Krivulja in krožnica s polmerom 2 se sekata pri kotih $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ in $\frac{7\pi}{4}$. Zato je

$$P = 4\int_0^{\pi/4} \left((2+\cos 2\varphi)^2 - 2^2\right) d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{\pi/4} \left(4\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi\right) d\varphi =$$

$$= 16 \left.\frac{\sin 2\varphi}{2}\right|_0^{\pi/4} + 4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}(1+\cos 4\varphi)\, d\varphi =$$

$$= 8 + 2\left(\varphi + \frac{\sin 8\varphi}{8}\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{2} + 8$$

2. Premico $x = u, z = u$ v ravnini (x, z) zavrtimo okrog osi z.

   (a) Opišite nastalo vrtenino v parametrični obliki $\vec{r}(u, v) = \ldots$

   (b) Zapišite koordinate točk na vrtenini, dobljenih z vrtenjem točke na premici s parametrom $u = 1$ za kota $v_1 = \pi/4$ in $v_2 = \pi/2$.

   (c) Zapišite še enačbi tangentnih ravnin na ploskev v obeh dobljenih točkah.

(a) Parametrizacija vrtenine:

$$\vec{r}(u,v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u)) = (u\cos v, u\sin v, u)$$

(b) $\vec{r}_1 = \vec{r}(1, \pi/4) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$

$\vec{r}_2 = \vec{r}(1, \pi/2) = (0, 1, 1)$

(c) Enačba tangentne ravnine v točki $\vec{r}_0 = \vec{r}(u_0, v_0)$ je:

$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$, kjer je normalni vektor

$$\vec{n} = \vec{r}_u(u_0, v_0) \times \vec{r}_v(u_0, v_0)$$

Najprej izračunajmo oba parcialna odvoda,

$\vec{r}_u = (\cos v, \sin v, 1)$, $\vec{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, 0)$

Normalni vektor v točki $\vec{r}_1$ je

$$\vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right),$$

enačba tangentne ravnine pa

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + (z - 1) = 0, \text{ torej}$$

$$-\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + z = 0$$

V točki $\vec{r}_2$ pa je $\vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -1, 1)$

in enačba ravnine

$$-(y-1) + (z-1) = 0, \text{ torej } -y + z = 0$$

3. Za sistem diferencialnih enačb

$$\dot{x} = -2x, \quad \dot{y} = x + y$$

(a) poiščite splošno rešitev,

(b) poiščite rešitev začetnega problema z začetnim pogojem

$$x(0) = 0, y(0) = 1,$$

(c) ugotovite, kakšna stacionarna točka je točka $(0, 0)$.

(a) Matrika koeficientov sistema je $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Izračunam lastne vrednosti:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(1-\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda+2)(\lambda-1) = 0,$$

torej $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$

Poiščimo še pripadajoča lastna vektorja

λ_1: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, torej $u + 3v = 0$ in $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

λ_2: $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, torej $u = 0$ in $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Splošna rešitev sistema je $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \vec{e}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \vec{e}_2 e^{\lambda_2 t}$,

torej $x(t) = -3C_1 e^{-2t}$, $y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}$

(b) Partikularna rešitev je: $C_1 = 0$ in $C_2 = 1$

(c) Stacionarna točka je sedlo.

4. V nekem kraju za devetimi gorami in devetimi vodami je vreme precej predvidljivo. Če danes dežuje, bo jutri dež z verjetnostjo 80%, če pa danes ne dežuje, bo jutri deževalo z verjetnostjo 10%.

   (a) Zapišite matriko prehodov stanj markovske verige, ki je določena z deževnimi dnevi.

   (b) Kolikšna je verjetnost, da bo v kraju za devetimi gorami in devetimi vodami 30. januarja 2104 deževalo?

a) $$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} D & \neg D \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ \neg D \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{bmatrix} \end{array}$$

b) $$P^T = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad I - P^T = \begin{bmatrix} 0{,}2 & -0{,}1 \\ -0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \pi = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ verjetnost, da bo nekega dne v daljni prihodnosti deževalo, je $\frac{1}{3}$.