Izpit iz Matematičnega modeliranja

13. 06. 2017

1. Izstrelek, izstreljen iz točke $(0,0)$, leti po paraboli z enačbo $y = -ax^2 + bx$, kjer je x oddaljenost od izstrelišča, y pa višina. Trije približno izmerjeni položaji izstrelka so (poleg začetne točke (0,0)) $(1,2)$, $(1,4)$ in $(2,4)$.

   - Zapišite matriko sistema enačb za parametra a in b.
   - Poiščite Moore–Penroseov inverz dobljene matrike.
   - Določite parametra a in b tako, da se bo dobljena parabola najbolje prilegala izmerjenim vrednostim.

   Rešitev: Postavimo x koordinate točk v vektor

   $$\mathbf{x} = (0,1,1,2)^T$$

   y koordinate v vektor

   $$\mathbf{y} = (0,2,4,4)^T$$

   vektor neznank a, b pa označimo z

   $$\mathbf{z} = (a,b)^T$$

   - Če zapišemo enačbo $y = -ax^2 + bx$ za vsako od danih točk, lahko preberemo matriko predoločenega sistema enačb za neznanki a in b:

     $$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

   - Matrika A ima dva linearno neodvisna stolpca. Moore-Penroseov inverz lahko v takem primeru izračunamo po formuli

     $$A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$$

     Z malo računanja (pri čemer si lahko pomagamo z enostavno formulo za izračun inverza 2×2 matrike A^TA) dobimo

     $$A^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

   - Rešujemo predoločen sistem

     $$A\mathbf{z} = \mathbf{y}$$

     Vemo, da se rešitev po metodi najmanjših kvadratov lahko izrazi kot

     $$\mathbf{z} = A^+\mathbf{y} = (1,4)^T$$

     Najboljši oceni za parametra a in b sta torej $a = 1$ in $b = 4$.

2. Pokvarjeno dvigalo štirinadstropne hiše ob vsakem postanku naključno izbere enega od strogo višjih nadstropij dokler ne pride do vrha, kjer se dokončno ustavi. Potnik vstopi v spodnje nadstropje in se odpelje.

   - Zapišite matriko prehodov stanj markovske verige, ki opisuje prehode potnika med nadstropji.
   - Določite pričakovano število postankov preden potnik obstane v zgornjem nadstropju.

   Rešitev :

   - Glede na besedilo lahko z malo razmišljanja zapišemo markovsko matriko

   $$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   - Stanje številka 4 (oz. najvišje nadstropje) je očitno absorbirajoče, zgoraj zapisana matrika pa je že v kanonični obiki. Vemo, da je pomembna matrika Q

   $$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   saj lahko z njo izrazimo fundamentalno matriko N matrike P

   $$N = (I - Q)^{-1}$$

   Izračun tega inverza nam precej olajša dejstvo, da imamo zgornje-trikotno matriko, in dobimo

   $$N = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   - S pomočjo fundamentalne matrike N lahko na zelo enostaven način izračunamo pričakovano število postankov pogojno na vsa začetna stanja naenkrat z množenjem $N\mathbf{e}$, kjer je $\mathbf{e}$ vektor samih enic.

   $$N\mathbf{e} = (11/6, 3/2, 1)^T$$

   Pričakovano število postankov preden pristanemo v 4. nadstropju (če začnemo v 1. nadstropju) je torej 11/6.

3. Dana je ploskev s parametrizacijo $\mathbf{p}(u, v) = (u + v, u - v, uv)$. Zapišite:

   (a) parametrizaciji koordinatnih krivulj skozi točko s parametroma $u = 1$, $v = 1$,

   (b) vektor v smeri normale na ploskev v tej točki,

   (c) enačbo tangentne ravnine v tej točki.

   Rešitev :

- Parametrizacijo koordinatne krivulje v u smeri skozi točko $(1,1)$ dobimo tako, da vstavimo $v=1$

$$\mathbf{r}_u(u) = \mathbf{p}(u,1) = (u+1, u-1, u)$$

  in podobno za koordinatno krivuljo v v smeri

$$\mathbf{r}_v(v) = \mathbf{p}(1,v) = (1+v, 1-v, v)$$

- Tangentna vektorja v u in v smeri dobimo z odvajanjem $\mathbf{r}_u$ in $\mathbf{r}_v$ (in vstavljanjem $u=1$, $v=1$)

$$\mathbf{t}_u = \frac{d\mathbf{r}_u}{du}(1) = (1,1,1)$$
$$\mathbf{t}_v = \frac{d\mathbf{r}_v}{dv}(1) = (1,-1,1)$$

  Normalni vektor lahko dobimo z vektorskim produktom tangentnih vektorjev $\mathbf{t}_u$ in $\mathbf{t}_v$

$$\mathbf{n} = \mathbf{t}_u \times \mathbf{t}_v = (2,0,-2)$$

- Enačba ravnine z normalo $\mathbf{n}$, ki gre skozi točko s krajevnim vektorjem $\mathbf{r}_0$, je

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0,$$

  kjer je $\mathbf{r} = (x,y,z)$ vektor spremenljivk. V našem primeru smo normalo že izračunali, krajevni vektor začetne točke pa dobimo s pomočjo parametrizacije

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{p}(1,1) = (2,0,1)$$

  Dobimo (po krajšanju enačbe z 2)

$$x - z = 1$$

4. Iščemo rešitev začetnega problema

$$x'' + 3x' - 4x = 0, \quad x(0) = 3 \quad \text{in} \quad x'(0) = -2.$$

   (a) Poiščite rešitev problema.
   (b) Diferencialno enačbo zapišite kot sistem diferencialnih enačb prvega reda. Zapišite tudi ustrezne začetne pogoje.
   (c) Zapišite en korak rešitve z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.2$.

   Rešitev:

   (a) Takoj lahko zapišemo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$$

   Rešitvi sta

$$\lambda_1 = -4$$

   ter

$$\lambda_2 = 1$$

Splošna rešitev ima torej obiko

$$x(t) = Ae^{-4t} + Be^{t},$$

kjer sta konstanti A in B odvisni od začetnih pogojev. Potrebujemo še odvod

$$x'(t) = -4Ae^{4t} + Be^{-t}$$

da lahko s pomočjo začetnih pogojev zapišemo enačbi za A in B

$$\begin{aligned} x(0) &= A + B = 3 \\ x'(0) &= -4A + B = -2 \end{aligned}$$

od koder lahko dobimo končno rešitev

$$x(t) = e^{-4t} + 2e^{-t}$$

(b) Z uvedbo nove spremenljivke $y = x'$ lahko prvotno enačbo 2. reda preoblikujemo v sistem dveh enačb 1. reda

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -3y + 4x \end{aligned}$$

Začetna pogoja sta zdaj

$$\begin{aligned} x(0) &= 3 \\ y(0) &= x'(0) = -2 \end{aligned}$$

(c) Za numerično reševanje je primerna oblika enačbe iz prejšnje točke. Če označimo vektor neznank

$$\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t))^T,$$

lahko en korak Eulerjeve metode (z začetno vrednostjo parametra $t = 0$) dobimo kot

$$\mathbf{z}(h) = \mathbf{z}(0) + h\mathbf{f}(0, \mathbf{z}(0)),$$

kjer je

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{z}) = \mathbf{f}(t, x, y) = \begin{bmatrix} y \\ -3y + 4x \end{bmatrix}$$

desna stran našega sistema enačb. Dobimo približek

$$\mathbf{z}(0.2) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + 0.2 \begin{bmatrix} -2 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.6 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$