Krožni omejen problem treh teles[1]

Dve nebesni telesi, recimo zvezda in njen planet, v idealiziranem primeru krožita okrog skupnega masnega središča. Zanima nas gibanje satelita pod vplivom sile teže teh dveh teles. Satelit ima (zelo) majhno maso in nima vpliva na gibanje zvezde in planeta. Čeprav se tiri gibanja sprva zdijo nepravilni in kaotični, lahko v takem sistemu poičemo periodične tire, ki so se izkazali za uporabne za astronomska opazovanja.

Sistem Sonce–Zemlja je zelo blizu idealiziranemu primeru kroženja. Najbolj znan primer umetnega satelita, ki se giblje po natančno določenem periodičnem tiru približno 5 svetlobnih sekund stran od Zemlje, je najbrž SOHO (Solar and Heliospheric Observatory), ki že od leta 1995 redno spremlja dogajanje na Soncu. Naslednji načrtovan vesoljski teleskop (JWST, James Webb Space Telescope) bo utirjen v podobno orbito na nasprotni strani Zemlje.

Enačbe gibanja satelita

Ker predpostavljamo, da zvezda z maso M in planet z maso m krožita okrog skupnega masnega središča, bomo enačbe gibanja zapisali v vrtečem koordinatnem sistemu, kjer masi M in m mirujeta. Označimo

$$\mu = \frac{m}{M+m} \quad \text{ter} \quad \bar{\mu} = 1 - \mu = \frac{M}{M+m}.$$

V brezdimenzijskih koordinatah (dolžinska enota je kar razdalja med masama M in m) postavimo maso M v točko $(-\mu, 0, 0)$, maso m pa v točko $(\bar{\mu}, 0, 0)$. Označimo z R in r oddaljenost satelita s položajem (x, y, z) od mas M in m, tj.

$$\begin{aligned} R &= R(x,y,z) = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}, \\ r &= r(x,y,z) = \sqrt{(x-\bar{\mu})^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

Enačbe gibanja satelita so potem:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= x + 2\dot{y} - \frac{\bar{\mu}}{R^3}(x+\mu) - \frac{\mu}{r^3}(x-\bar{\mu}), \\ \ddot{y} &= y - 2\dot{x} - \frac{\bar{\mu}}{R^3}y - \frac{\mu}{r^3}y, \\ \ddot{z} &= -\frac{\bar{\mu}}{R^3}z - \frac{\mu}{r^3}z, \end{aligned}$$

[1] Circular restricted three body problem

kjer je $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ in podobno za y ter z. Za natančno izpeljavo glej [?].

Sistem opisan z zgornjimi enačbami ima 5 stacionarnih točk, ki jih označimo z L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 in jim pravimo *Lagrangeeve točke*. Položaje teh točk izračunamo kot ničle polinomov 5. stopnje, glej [**?**, stran 13].

Naloga

1. Poiščite položaje Lagrangeevih točk (v brezdimenzijskih koordinatah) za nekaj naravnih sistemov:

   - Sonce–Zemlja,
   - Zemlja–Luna,
   - Sonce–Jupiter.

2. Poiščite in narišite tire gibanja satelitov v zgornjih treh sistemih. Kaj se zgodi, če satelit na začetku miruje v eni od Lagrangeevih točk? Kako se satelit giblje, če je na začetku v bližini Lagrangeevih točk L_4 ali L_5?

3. Poiščite Jacobijevo matriko desne strani pripadajočega sistema prvega reda in jo izračunajte v stacionarnih točkah $L_1, \ldots, L_5$. Kaj so lastne vrednosti teh matrik za zgornje naravne sisteme? Poiščite nekaj rešitev lineariziranega sistema v okolici stacionarnih točk L_1 in L_2.

4. Narišite sliko Poincaréjeve preslikave (presek tira z ravnino $y = 0$) lineariziranega sistema v bližini točk L_1 in L_2 za sistem Sonce–Zemlja. Uporabite rešitev lineariziranega sistema (oziroma začetne pogoje na ravnini $y = 0$) za začetni približek in poiščite periodične tire okrog točk L_1 in L_2 originalnega sistema. (Periodičen tir lahko dobite tako, da poiščete fiksno točko Poincaréjeve preslikave. Uporabite diskretizirano Newtonovo, Broydenovo ali večrazsežno sekantno metodo.)

Literatura

[1] `http://brain2.math.fau.edu/~jmirelesjames/hw4Notes.pdf`