Valovna enačba

Valovna enačba ima v splošnem obliko

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \triangle u,$$

kjer je $u(t, \mathbf{x})$ funkcija časa t in prostorskih koordinat $\mathbf{x}$, c hitrost valovanja in $\triangle$ Laplaceov operator. V dveh dimenzijah in v kartezičnih koordinatah dobimo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right).$$

K tej parcialni diferencialni enačbi (PDE) spadajo še začetni pogoji (za začetno vrednost u in začetno hitrost $\partial u/\partial t$)

$$\begin{aligned} u(0, x, y) &= f(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0, x, y) &= g(x, y) \end{aligned}$$

in morda še pogoji na robu območja, ki ga imamo.

Valovno enačbo lahko analitično obravnavamo na različne načine in možni so tudi različni pristopi za numerično reševanje.

Ena možnost je, da to PDE prevedemo na sistem navadnih diferencialnih enačb na naslednji način: recimo da nas zanima rešitev na pravokotniku $[0, 1] \times [0, 1]$. To območje diskretiziramo, da dobimo mrežo enakomerno porazdeljenih točk (x_i, y_j), $i, j = 1, \ldots, n$ in iščemo približke rešitve

$$u_{i,j}(t) := u(t, x_i, y_j),$$

na tej mreži točk (vsak $u_{i,j}$ je potem funkcija časa). Laplaceov operator funkcije na takšni mreži lahko približno izrazimo z

$$\triangle u(x_i, y_j) \doteq \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j})$$

Dobimo sistem $n \times n$ (ali morda $n - 1 \times n - 1$, če so vrednosti na robu fiksne) navadnih diferencialnih enačb 2. reda

$$\ddot{u}_{i,j} = \frac{c^2}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}), \; i, j = 1, \ldots n$$

Kot vemo, sisteme 2. reda pogosto prevedemo na dvakrat večji sistem 1. reda z uvedbo nove spremenljivke. V tem primeru lahko za novo spremenljivko vzamemo hitrostno polje $v_{i,j} = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x_i, y_j)$ in ta sistem prepišemo v sistem

$$\begin{aligned} \dot{u}_{i,j} &= v_{i,j} \\ \dot{v}_{i,j} &= \frac{c^2}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}), \end{aligned}$$

ki ga lahko rešujemo z običajnimi metodami za reševanje navadnih diferencialnih enačb (Eulerjeva metodo, Runge-Kutta ...)

Naloga

Napišite program, ki v realnem času prikazuje potek rešitve valovne enačbe po zgornji metodi na $n \times n$ mreži (za n ni potrebno vzeti števila, ki je več kot 100, tudi za recimo $n = 30$ se dobi realistično animacijo) pri različnih začetnih in robnih pogojih, ali celo pri sprotnih spremembah vrednosti funkcije u, ki jih vnese uporabnik.

Pri tem lahko uporabite Eulerjevo metodo, za natančnejše in bolj stabilno simulacijo pa lahko tudi metodo Runge-Kutta (v tem primeru potrebujete več kopij matrik $u_{i,j}$ in $v_{i,j}$).

Kot robni pogoj preizkusite vsaj naslednja dva primera:

1. Na robu je vrednost funkcije u in vrednost hitrosti v ves čas konstantno 0 (se pravi $u_{1,i} = v_{1,i} = u_{n,i} = v_{n,i} = u_{i,1} = v_{i,1} = u_{i,n} = v_{1,n} = 0$ za vse $i = 1, \ldots n$).

   Tak primer bi simuliral valovanje membrane, ki pritrjena na kvadraten okvir.

2. Robovi so prosti. V tem primeru je treba prilagoditi enačbe na robu kvadrata. Za oglišče $u_{1,1}$ se dobi enačbi

$$\begin{aligned} \dot{u}_{1,1} &= v_{1,1} \\ \dot{v}_{1,1} &= \frac{c^2}{h^2}(u_{2,1} + u_{1,2} - 2u_{1,1}), \end{aligned}$$

   za točke na robu $u_{1,j}$, kjer je $2 \leq j \leq n - 1$ pa

$$\begin{aligned} \dot{u}_{1,j} &= v_{1,j} \\ \dot{v}_{1,j} &= \frac{c^2}{h^2}(u_{2,j} + u_{1,j+1} + u_{1,j-1} - 3u_{1,j}), \end{aligned}$$

   in podobno še za ostale robne primere.

   Takšen robni pogoj bi simuliral recimo valovanje vodne gladine v kvadratnem bazenu (ki ima konstantno globino in ima valovanje samo navpično komponento).

Za začetni pogoj lahko preizkusite primer, ko je na začetku $u(0, x, y) = 0$ in $v(0, x, y) = 0$, razen v eni izbrani točki v notranjosti, ki ji daš neko negativno začetno hitrost. Takšen začetni pogoj bi recimo simuliral padec majhnega kamna v vodo ali na membrano. Potem lahko preizkusite podoben začetni pogoj za več točk hkrati, da se bo videla interferenca valovanja, odboj valov od roba itd.

Zgornje enačbe določajo sistem, kjer se energija ne izgublja in se valovanje zato nikoli se umiri. Zaradi numeričnih približkov se pri večjih vrednosti za začetne hitrosti lahko celo zgodi, da rešitev postane nestabilna, še posebej pri reševanju z Eulerjevo metodo. Za večji realizem lahko v enačbo dodate člen, ki duši valovanje, sorazmerno s trenutno hitrostjo. Druga enačba potem dobi obliko

$$\dot{v}_{i,j} = \frac{c^2}{h^2} \left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}\right) - kv_{i,j}$$

za neko konstanto k.