

Določanje položajev radarjev

Radi bi onesposobili protizračno obrambo neke države in v ta namen moramo najprej odkriti položaje radarjev raketnih sistemov. Vemo, da ima sovražnik n radarjev razporejenih na lokacijah z neznanimi kordinatami (u_k, v_k) , $k = 1, \dots, n$. Na voljo imamo letala, ki lahko na varni razdaljo z neko natančnostjo merijo skupno jakost radarskih signalov, ne pa tudi smeri. Vemo, da jakost signala posameznega radarja pada s kvadratom razdalje, v dani točki (x, y) je tako jakost k -tega signala enaka

$$j_k(x, y) = \frac{c}{(x - u_k)^2 + (y - v_k)^2},$$

kjer je c konstanta, ki nam jo zagotovi proizvajalec, ki je pred leti sovražniku prodal radarje. V m točkah s znanimi koordinatami (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, m$ opravimo meritve, ki nam dajo vrednosti z_i za skupno jakost. Približno torej velja

$$\begin{aligned} z_1 &\doteq \sum_{k=1}^n j_k(x_1, y_1) \\ z_2 &\doteq \sum_{k=1}^n j_k(x_2, y_2) \\ &\vdots \\ z_m &\doteq \sum_{k=1}^n j_k(x_m, y_m) \end{aligned}$$

Naloga

1. Najmanj koliko meritev je potrebno opraviti, da lahko vsaj teoretično določimo položaje radarjev?
2. V smislu metode najmanjših kvadratov zapišite funkcijo, ki jo je potrebno minimizirati, da dobimo najboljšo oceno za neznane položaje (x_i, y_i) .
3. Sistem enačb, ki jih dobite po metodi najmanjših kvadratov, je nelinearen. Uporabite gradientno ali Newtonovo oz. Gauss-Newtonovo metod (ali pa kombinacijo metod) za reševanje sistemov nelinearnih enačb, da za dane podatke izračunate oceno za neznane položaje. Preizkusite delovanje takega algoritma na simuliranih podatkih.
4. S pomočjo simuliranih podatkov analizirajte vpliv števila meritev, povprečnih merskih napak in povprečnih oddaljenosti meritev od radarskih postaj na natančnost rezultatov.