

# Brownovo gibanje

Brownovo gibanje je najpomembnejši primer markovskega procesa, ki poteka v zveznem času in ima za prostor stanj  $\mathbb{R}^d$ . V natančno definicijo se ne bomo spuščali, lahko pa približke za poti Brownovega gibanja zelo enostavno simuliramo:

Z  $W(t)$  označimo stanje ob času  $t$  (torej  $W(t) \in \mathbb{R}^d$ ). Potem lahko dobimo stanje ob času  $W(t+h)$  z

$$W(t+h) = W(t) + X,$$

kjer  $X \sim N(0, h)$  normalno porazdeljena slučajna spremenljivka z varianco  $h$ , oziroma vektor neodvisnih normalnih spremenljivk z isto varianco  $h$ .

**1.del** Napišite funkcije, ki simulirajo in narišejo potek Brownovega gibanja v dani dimenziji in za dano začetno stanje in korak  $h$ . Nekaj slik primerov poti za  $d = 1, 2, 3$  vključite tudi v poročilo.

Potem boste obravnavali nekaj vprašanj v zvezi z Brownovim gibanjem, za katere poznamo teoretične odgovore, ki pa jih boste primerjali z rezultati simulacij.

**1. Izstopna porazdelitev iz množice:** Recimo, da začnemo Brownovo gibanje v neki začetni točki  $(x, y)$ , ki leži znotraj nekega pravokotnika v ravnini. Brownovo gibanje gotovo prej ali slej uide iz pravokotnika, vprašanje pa je, kje. S pomočjo simulacije za dano začetno točko in pravokotnik ocenite verjetnost, da Brownovo gibanje uide iz pravokotnika na določeni stranici.

Verjetnost takega dogodka je možno teoretično izračunati, če se rešijo ustrezne enačbe. Natančnejša navodila za to dobite na govorilnih urah oz. vajah.

**2. Minljivost in povrnjivost:** Začnimo Brownovo gibanje  $W_t$  v točki  $x \in \mathbb{R}^d$ , za katero velja  $r < \|x\| < R$  za neki razdalji  $r$  in  $R$ .

Z  $S_r$  in  $S_R$  označimo prvi čas, ko se  $W_t$  približa na razdaljo  $r$  od izhodišča oz. oddalji na razdaljo  $R$ . S simulacijo ocenite verjetnost

$$\mathbb{P}(S_r < S_R)$$

pri dani začetni točki  $x$  za dimenzije  $d = 1, 2, 3$ .

To verjetnost je možno izračunati teoretično:

- Za  $d = 1$

$$\mathbb{P}(S_r < S_R) = \frac{R - x}{R - r}$$

- Za  $d = 2$

$$\mathbb{P}(S_r < S_R) = \frac{\log(R) - \log(\|x\|)}{\log(R) - \log(r)}$$

- Za  $d \geq 3$

$$\mathbb{P}(S_r < S_R) = \frac{R^{2-d} - \|x\|^{2-d}}{R^{2-d} - r^{2-d}}$$

Izračunajte limite zgornjih verjetnosti, ko  $R \rightarrow \infty$ . Kaj to pove o minljivosti in povrnljivosti za Brownovo gibanje v različnih dimenzijah?

- 3. Izhodni čas iz dane množice:** Začnete enako kot pri prvi nalogi, le da tokrat merite povprečen čas, ki je potreben, da  $W_t$  doseže rob pravokotnika.

Tudi tu je možno ta povprečen čas glede na začetno točko teoretično izračunati, če se rešijo prave enačbe, ki pa jih bomo naknadno razložili.